21 சமனிலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- $x \pm a \gtrless b$ வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகளைத் தீர்ப்பதற்கும்
- $ax \gtrless b$ வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகளைத் தீர்ப்பதற்கும்
- சமனிலி ஒன்றின் நிறைவெண் தீர்வுகளைக் காண்பதற்கும்
- சமனிலி ஒன்றின் தீர்வுகளை எண் கோடு ஒன்றின் மீது வகைகுறிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

இலங்கையின் சிரேஷ்ட பிரசை என்று கருதப்படும் ஒருவரின் வயது 55 வருடமாகவோ அல்லது அதிலும் அதிகமாக இருக்க வேண்டும் என ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. எனவே சிரேஷ்ட பிரசை ஒருவரின் வயதை t எனக் கொண்டால் அதனை $t \geq 55$ என்னும் சமனிலியினால் குறித்துக் காட்டலாம். இங்கே t இன் பெறுமானம் எப்போதும் 55 ஐ விட அதிகமாக இருக்கும் என்பது இதன் பொருளாகும்.

இவ்வாறான சமனிலிகள் தொடர்பாக நீங்கள் தரம் 8 இல் கற்ற விடயங்களை நினைவு கூர்வோம்.

$x > 3$ என்பது ஒரு சமனிலியாகும். x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் எப்போதும் 3 இலும் அதிகமாக இருக்கும் என்பது இதன் பொருளாகும். இருந்தபோதும் $x \geq 3$ எனக் குறிக்கப்பட்டால் x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 3 அல்லது அதிலும் அதிகம் என்பது கருதப்படுகின்றது.

அவ்வாறே $x < 3$ என்பது x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 3 இலும் குறைவு எனவும் $x \leq 3$ என்பது x எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 3 அல்லது அதிலும் குறைவு எனவும் கருதப்படுகின்றது.

உதாரணமாக $x > 3$ என்னும் சமனிலியின் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையானது 3 இலும் அதிகமான சகல நிறைவெண்களையும் கொண்ட தொடையாகும். இச்சமனிலியின் தீர்வுத் தொடை $\{4, 5, 6, \ldots\}$ ஆகும்.

சகல தீர்வுகளையும் தொடையாகக் காண்பிப்பது கணிதத்தில் முக்கிய விடயமாக இருப்பினும் நிறைவெண் தீர்வுகளை எழுதும்போது தீர்வுகளை மாத்திரம் எழுதிக் காட்டலாம்.

உதாரணமாக $x > 3$ என்னும் சமனிலியின் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை $4, 5, 6, \ldots$ எனக் கூறலாம்.

அட்சரம் அடங்கும் சமனிலி ஒன்றில் அட்சரம் எடுக்கக்கூடிய எல்லாப் பெறுமானங்களும் அடங்கும் தொடை அச்சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையாகும். சமனிலி ஒன்றின் தீர்வுத் தொடையையும் அத்தீர்வுகளை எண் கோடு ஒன்றில் குறிக்கும் விதத்தையும் பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.

உதாரணம் 1

$x > 3$ என்னும் சமனிலியின்
(i) நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.
(ii) நிறைவெண் தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.

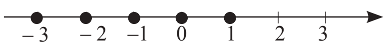
(i) $\{4, 5, 6, 7, 8, ...\}$

(ii)

உதாரணம் 2

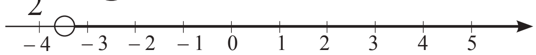
$x \leq 1$ என்னும் சமனிலியின்
(i) நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.
(ii) நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.

(i) $\{..., -3, -2, -1, 0, 1\}$

(ii) 

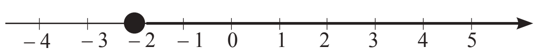
உதாரணம் 3

$x > -3\frac{1}{2}$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.



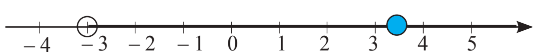
உதாரணம் 4

$x \geq -2$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.



உதாரணம் 5

$-3 < x \leq 3\frac{1}{2}$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வுத் தொடையை எண் கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.

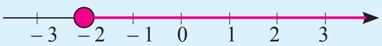


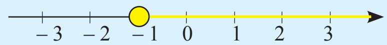
முன்னர் கற்றவற்றை மேலும் உறுதிப்படுத்துவதற்குத் தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

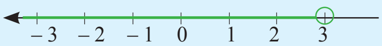
மீட்டற் பயிற்சி

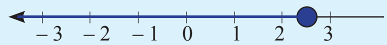
1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியினதும் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடையை எண்கோட்டில் குறித்துக் காட்டுக.
   (i) $x > 2$ (ii) $x \geq -1$ (iii) $x < 4$ (iv) $x \leq -21$ (v) $x > 1\frac{1}{2}$

2. எண் கோடுகளின் மீது குறிக்கப்பட்டிருக்கும் தீர்வுகளுக்குரிய சமனிலிகளை எழுதுக.

   (i) 

   (ii) 

   (iii) 

   (iv) 

3. பின்வரும் சமனிலிகளின் தீர்வுகளை எண் கோடுகளில் குறித்துக் காட்டுக.
   (i) $-1 < x < 2$ (ii) $-2 \leq x < 3$ (iii) $-3 < x \leq 1$
   (iv) $x < -1$ உம் $x \geq 2$ உம் (v) $x \leq -3$ உம் $x > 0$ உம்

21.1 $x \pm a \gtrless b$ என்னும் வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகள்

குறித்தவொரு பாலத்துக்கு அருகில் பொருத்தப்பட்டிருந்த பலகையில் இவ்வாறு எழுதப்பட்டிருந்தது.

''இப்பாலத்தின் ஊடாக 10 தொன்களிலும் குறைந்த திணிவையே கொண்டு செல்லலாம்.'' 4 தொன் திணிவைக் கொண்ட லொறி ஒன்றில் பொருள்கள் ஏற்றப்பட்டு, இப்பாலத்தைக் கடந்து செல்ல வேண்டும் எனக் கொள்வோம். லொறியில் ஏற்றப்பட்ட பொருள்களின் திணிவு x தொன்கள் எனக் கொண்டால் $x + 4 < 10$ ஆக இருந்தால் மட்டுமே லொறி பாதுகாப்பாகப் பாலத்தைக் கடந்து செல்லும். அதாவது பொருள்களுடன் லொறியின் திணிவு $x + 4 < 10$ என்னும் சமனிலியைத் திருப்தி செய்தால் மட்டுமே லொறி பாதுகாப்பாகப் பாலத்தைக் கடக்கக்கூடியதாக இருக்கும்.

$x + 4 < 10$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்துப் பாலத்தைக் கடந்து செல்லக்கூடியவாறு லொறியில் ஏற்றக்கூடிய பொருள்களின் மிகக் கூடிய திணிவைக் காணலாம்.

சமனிலிக் குறியீட்டின் ஒரு பக்கத்தில் x அல்லது கொடுக்கப்பட்ட மாறிலி மட்டும் இருக்கும் விதத்தில் சமனிலி ஒன்றைப் பெற்றுக்கொள்வதே சமனிலியின் தீர்வைக் காண்பதாகும்.

சமனிலிகளைத் தீர்க்கும் முறையானது பெரும்பாலும் சமன்பாடு ஒன்றைத் தீர்க்கும் முறைக்கு ஒத்துள்ளது.

உதாரணமாக மேலே கொடுக்கப்பட்ட $x + 4 < 10$ என்னும் சமனிலியின் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 4 ஐக் கழிக்கலாம். அதற்கேற்ப
$x + 4 - 4 < 10 - 4$

இதனைச் சுருக்கும்போது

$x < 6$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது ஏற்றக்கூடிய பொருள்களின் திணிவு 6 தொன்களிலும் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 1

$x + 2 < 7$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து, நிறைவெண் தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறிக்க.

$$x + 2 < 7$$

$$x + 2 - 2 < 7 - 2 \text{ (இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 2 ஐக் கழிக்கும்போது)}$$

$$x < 5$$

x இன் நிறைவெண் தீர்வுகள்

உதாரணம் 2

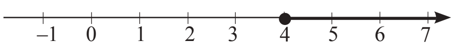
$x - 3 \geq 1$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறிக்க.

$$x - 3 \geq 1$$

$$x - 3 + 3 \geq 1 + 3 \text{ (இரு பக்கங்களுடனும் 3 ஐக் கூட்டும்போது)}$$

$$x \geq 4$$

இத்தீர்வுகளை எண்கோட்டில் குறிப்போம்.



இங்கு 4 இற்குச் சமனான அல்லது 4 இலும் பெரிய எண்கள் தீர்வுகளாகக் குறிக்கப் பட்டுள்ளன. இத்தீர்வுகளுள் நிறைவெண்கள் மட்டுமல்லாமல் 4.5, 5.02 போன்ற எல்லா எண்களும் அடங்குகின்றன என்பதைக் கவனத்திற்கொள்ள வேண்டும்.

உதாரணம் 3

பை ஒன்றில் இடக்கூடிய அதிகபட்சத் திணிவு 6 கிலோகிராம் ஆகும். வர்சினி ஒவ்வொன்றும் 1 கிலோகிராம் வீதம் திணிவுள்ள x எண்ணிக்கையான அரிசிப் பைக்கெற்றுகளையும் ஒவ்வொன்றும் 1 கிலோகிராம் வீதம் திணிவுள்ள 2 பைக்கெற்றுச் சீனியையும் அப்பையில் இட்டாள்.

இத்தரவுகளை $x + 2 \leq 6$ என்னும் சமனிலியின் மூலம் குறிக்கலாம்.

(i) இச்சமனிலியைத் தீர்க்க.

(ii) வர்சினிப் பையில் இடக்கூடிய அதிகூடிய அரிசிப் பைக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு ?

(i) $x + 2 \leq 6$

$x + 2 - 2 \leq 6 - 2$

$x \leq 4$

(ii) $\therefore$ பையில் இடக்கூடிய அதிகூடிய அரிசிப் பைக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகும்.

பயிற்சி 21.1

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து அவற்றின் நிறைவெண் தீர்வுத் தொடைகளையும் எழுதுக.

(i) $x + 3 > 5$ (ii) $x - 4 < 1$ (iii) $x - 7 \geq -6$
(iv) $2 + x \leq -4$ (v) $7 + x > 5$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து, அவற்றின் நிறை வெண் தீர்வுத் தொடைகளை எண் கோடுகளில் குறித்துக் காட்டுக.

(i) $x + 1 > 3$ (ii) $x - 3 \leq 1$ (iii) $6 + x \geq 2$
(iv) $x - 7 < -7$ (v) $x + 5 > -1$

3. ரிஷ்மி 60 ரூபாய் வைத்திருக்கிறார். அவர் ரூ. x விலையுள்ள ஒரு புத்தகத்தையும் ரூ.10 விலையுள்ள பேனா ஒன்றையும் வாங்குகிறார். அவர் வாங்கிய பொருள்களின் பெறுமானத்தை $x + 10 \leq 60$ என்னும் சமனிலியின் மூலம் குறித்துக்காட்டலாம். அச்சமனிலியைத் தீர்த்து ஒரு புத்தகத்தின் மிகக்கூடிய விலை எவ்வளவாக இருக்கும் எனக் காண்க.

4. வான் ஒன்றில் செல்லத்தக்க மிகக்கூடிய பயணிகளின் எண்ணிக்கை 15 ஆகும். குறித்த ஓர் இடத்தில் 3 பயணிகளும் இன்னுமோர் இடத்தில் x பயணிகளும் அவ்வானில் ஏறினர். இத்தகவல்களை $x + 3 \leq 15$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம்.

(i) இச்சமனிலியைத் தீர்க்க.
(ii) இரண்டாம் தரிப்பிடத்தில் வானில் ஏறக்கூடிய பயணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காட்டும் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.
(iii) இரண்டாம் தரிப்பிடத்தில் ஏறக்கூடிய அதிகபட்சப் பயணிகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு ?

5. ராகவன், ரெஜினா ஆகியோரின் வயதுகளின் கூட்டுத்தொகை 30 அல்லது 30 இலும் குறைவாகும். ராகவன் 14 வயதுடையவராவார். ரெஜினாவின் வயது x வருடங்கள் எனக் கொண்டால், இத்தகவல்களை $x + 14 \leq 30$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம். இச்சமனிலியைத் தீர்ப்பதன் மூலம் ரெஜினாவின் அதிகபட்ச வயது எவ்வளவாக இருக்கும் எனக் காண்க

21.1 $ax \gtreqless b$ என்னும் வடிவத்தில் அமைந்த சமனிலிகள்

இரண்டு புத்தகங்களின் விலை ரூ. 40 இலும் அதிகமானது. ஒரு புத்தகத்தின் விலையை ரூ. x எனக் கொண்டு x ஐத் தொடர்புபடுத்தி $2x > 40$ என்னும் சமனிலியை எழுதலாம். அச்சமனிலியைத் தீர்ப்பதன் மூலம் ஒரு புத்தகத்தின் விலையாக அமையக்கூடிய பெறுமானங்களைக் காணலாம். இவ்வாறான சமனிலிகளைத் தீர்ப்பத்தில் சமனிலிகள் பற்றி நாம் அறியவேண்டிய சில விசேட பண்புகள் உள்ளன. முதலில் அவற்றைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

பின்வரும் சமனிலிகளை நோக்குவோம்.

(i) $3 < 4$ என்னும் சமனிலி உண்மையானது.

$2 \times 3 < 2 \times 4$ (இரு பக்கங்களையும் இரண்டால் பெருக்குவதன் மூலம்)

$6 < 8$ சமனிலியும் உண்மையாகும்.

(ii) $8 > 6$ சமனிலி உண்மையானது.

$\frac{8}{2} > \frac{6}{2}$ (இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் வகுப்பதன் மூலம்)

$4 < 3$ என்னும் சமனிலியும் உண்மையானது.

சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் ஒரே நேர் எண்ணினால் பெருக்குவதால் அல்லது வகுப்பதால் பெறப்படும் சமனிலியில் மாற்றம் ஏற்படாது.

(iii) $2 < 3$ சமனிலி உண்மையானது

$2 \times -2 < 3 \times -2$ (இரு பக்கங்களையும் -2 ஆல் பெருக்குவதன் மூலம்)

$-4 < -6$ என்னும் சமனிலி பெறப்படும். இது பிழையானது.

ஆனால் $-4 > -6$ என்பதே உண்மையாகும்.

(iv) $9 > 6$ சமனிலி உண்மையானது

$\frac{9}{-3} > \frac{6}{-3}$ (இரு பக்கங்களையும் -3 ஆல் வகுப்பதன் மூலம்)

பெறப்படும். $-3 > -2$ என்னும் சமனிலி பெறப்படும். இது பிழையானது. ஆனால் $-3 < -2$ சமனிலியே உண்மையானது. ஆகவே இவற்றிலிருந்து நாம் ஒரு முடிவுக்கு வரலாம்.

சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் மறை எண் ஒன்றினால் பெருக்குவதால் அல்லது வகுப்பதால் பெறப்படும் சமனிலியில் மாற்றம் ஏற்படும். அதாவது $>$ என்னும் குறியீடு $<$ ஆகவும் $\leq$ என்னும் குறியீடு $\geq$ ஆகவும் மாற்றமடையும்.

இத்தகவல்களைக் கவனித்து மேலுள்ள விதத்தில் சமனிலி ஒன்றைத் தீர்க்கும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

$2x < 12$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து அதன் தீர்வுகளை எண்கோடு ஒன்றில் குறித்துக் காட்டுக.

$$2x < 12$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} < \frac{12}{2} \quad \text{(இரு பக்கங்களையும் 2 ஆல் வகுப்பதால்)}$$

$$x < 6$$

உதாரணம் 2

$3x \geq 12$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$3x \geq 12$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \geq \frac{12}{3}$$

$$x \geq 4$$

உதாரணம் 3

$-5x \leq 15$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$-5x \leq 15$$

$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{15}{-5} \quad \text{(மறையெண்ணால் வகுக்கும்போது சமனிலி மாறும்)}$$

$$x \geq -3$$

உதாரணம் 4

$\frac{x}{3} < 2$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$\frac{x}{\cancel{3}} \times \cancel{3} < 2 \times 3 \quad \text{(இரு பக்கங்களையும் 3 ஆல் பெருக்குவதால்)}$$

$$x < 6$$

உதாரணம் 5

$-\frac{2x}{5} > 6$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்க்க.

$$-\frac{2x}{5} > 6$$

$$-\frac{2x}{\cancel{5}} \times \cancel{5} > 6 \times 5 \quad \text{(இரு பக்கங்களையும் 5 ஆல் பெருக்குவதால்)}$$

$$-2x > 30$$

$$\frac{-\cancel{2}x}{-\cancel{2}} < \frac{30}{-2} \quad \text{(இரு பக்கங்களையும் } -2 \text{ ஆல் வகுப்பதால் சமனிலி மாறுகிறது.)}$$

$$x < -15$$

பயிற்சி 21.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து நிறைவெண் தீர்வுகளை எழுதுக.
(i) $2x > 6$ (ii) $3x \leq 12$ (iii) $-5x \geq 10$ (iv) $-7x < -35$
(v) $-2x > -5$ (vi) $\frac{x}{2} \leq 1$ (vii) $\frac{x}{4} \geq -2$ (viii) $-\frac{2x}{3} < 4$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலியையும் தீர்த்து, பெறப்பட்ட தீர்வுகளை எண் கோடு ஒன்றில் குறிக்க.
(i) $4x > 8$ (ii) $7x \leq 21$ (iii) $-3x \geq 3$ (iv) $-2x < -6$
(v) $\frac{x}{3} \geq 1$ (vi) $\frac{x}{6} < -\frac{1}{6}$ (vii) $\frac{2x}{3} \geq 4$ (viii) $-\frac{3x}{5} < -\frac{1}{6}$

3. 2 மாம்பழங்களின் விலை ரூ. 50 இற்குச் சமமானது அல்லது குறைவானதாகும் அல்லது குறைவானதாகும். 1 மாம்பழத்தின் விலை ரூ. x எனின் இத்தரவை $2x \leq 50$ எனக் குறிக்கலாம். இச்சமனிலியைத் தீர்த்து ஒரு மாம்பழத்தின் விலையாக இருக்கக்கூடிய அதிகபட்ச விலை எவ்வளவு எனக் காண்க.

4. குறித்தவொரு மின் உயர்த்தியில் கொண்டு செல்லக்கூடிய அதிகபட்சத் திணிவு 520 கிலோகிராம் ஆகும். ஒவ்வொருவரும் x kg வீதம் திணிவுள்ள 8 மனிதர்கள் இந்த மின் உயர்த்தி மூலம் மேலே கொண்டு செல்லப்பட்டனர். இத்தகவல்களை $8x \leq 520$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம். அதனைத் தீர்த்து மின் உயர்த்தியில் கொண்டு செல்லப்பட்ட ஒரு மனிதனின் அதியுயர் திணிவாக அமையக்கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. (i) தன்னிடம் இருக்கும் பணம் அனுஷனிடம் இருக்கும் பணத்தின் நான்கு மடங்கை விடக் குறைவாகும் எனப் பமீலா கூறுகிறார். பமீலாவிடம் 68 ரூபாய் உள்ளது. அனுஷனிடம் இருக்கும் பணம் ரூ. x எனின், இத்தரவுகளை $4x > 68$ என்னும் சமனிலியினால் குறிக்கலாம். இச்சமனிலியைத் தீர்த்து அனுஷனிடம் இருக்கும் பணத்தைக் காண்க.
(ii) அனுஷனிடம் 5 ரூபாய் நாணயங்கள் மட்டுமே இருப்பின் அவரிடம் இருக்கத்தக்க கூடியபட்சப் பணத்தொகை எவ்வளவு?

பொழிப்பு

- சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் ஒரே நேர் எண்ணினால் பெருக்கும் போது அல்லது வகுக்கும்போது சமனிலி மாற்றமடையாது.
- சமனிலி ஒன்றின் இரு பக்கங்களையும் மறை எண் ஒன்றினால் பெருக்குவதால் அல்லது வகுப்பதால் பெறப்படும் சமனிலியில் மாற்றம் ஏற்படும். அதாவது $>$ என்னும் குறியீடு $<$ ஆகவும் $\leq$ என்னும் குறியீடு $\geq$ ஆகவும் மாற்றமடையும்.

22

தொடைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- முடிவுள்ள தொடை, முடிவிலித் தொடை ஆகியவற்றை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- தரப்பட்டுள்ள ஒரு தொடையின் தொடைப் பிரிவுகளை எழுதுவதற்கும்
- சமவலுத் தொடை, சம தொடை, மூட்டற்ற தொடை, அகிலத் தொடை ஆகியவற்றை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- தொடைகள் இரண்டின் இடைவெட்டுத் தொடையையும் ஒன்றிப்புத் தொடையையும் அறிந்துகொள்வதற்கும்
- ஒரு தொடையின் நிரப்பித் தொடையை அறிந்துகொள்வதற்கும்
- வென் வரிப்படத்தில் தொடைப் பிரதேசங்களைக் குறிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

தொடையின் அறிமுகம்

நிச்சயமாக அறிந்து கொள்ளக்கூடியவற்றினைக் கொண்ட ஒரு கூட்டம் ஒரு **தொடை** என முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். ஒரு தொடையைச் சார்ந்தவை அத்தொடையின் மூலகங்கள் எனப்படும். மூலகங்களை விவரிப்பதற்காகச் சங்கிலி அடைப்பு பயன்படுத்தப்படும். a என்பது ஒரு தொடை A இன் மூலகமாயின் அது $\boldsymbol{a \in A}$ என எழுதப்படும். மேலும் தொடை A இலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கையானது $\boldsymbol{n(A)}$ இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும்.

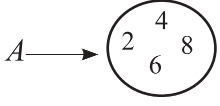
தொடைகளை வகைகுறித்தல் தொடர்பாக முன்னர் கற்றவற்றை நினைவுகூர்வோம்.

- நிச்சயமாக வரையறுக்கத்தக்க ஒரு பொதுப் பண்பின் மூலம் விவரித்தல்.
- அதன் மூலகங்களைச் சங்கிலி அடைப்பினுள்ளே எழுதுதல்
- வென் வரிப்படத்தில் மூலம் குறித்தல்

உதாரணமாக 0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள எல்லா இரட்டை எண்களையும் மேற்குறித்த மூன்று முறைகளிலும் காட்டக்கூடிய விதத்தை முறையே கவனத்தில் கொள்வோம். இத்தொடையை A எனப் பெயரிடுவோம். அப்போது

1. A = {0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரட்டை எண்கள்}

2. $A = \{2, 4, 6, 8\}$

3. 

மூலகங்கள் அற்ற தொடை **சூனியத் தொடை** அல்லது **வெறுந் தொடை** எனப்படும். சூனியத் தொடையானது { } அல்லது $\emptyset$ இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும். ஒரு சூனியத் தொடையின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை 0 எனக் கருதப்படும். அதாவது A ஒரு சூனியத் தொடையாயின், $n(A) = 0$ ஆகும்.

உதாரணமாக

P = {5 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரட்டை முதன்மை எண்கள் } ஆயின்,

5 இற்கும் 10 இற்குமிடையில் இரட்டை முதன்மை எண்கள் இல்லை என்பதால் $P = \emptyset$ உம் $n(P) = 0$ உம் ஆகும்.

நீங்கள் முன்னர் கற்றவற்றை மீட்பதற்காகப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூட்டமும் தொடையாகுமா எனத் தீர்மானிக்க.
(i) 0 இற்கும் 30 இற்கும் இடையிலுள்ள நான்கின் மடங்குகள்
(ii) இலங்கையின் மாவட்டங்கள்
(iii) கணிதத்தில் திறமையுள்ள மாணவர்கள்
(iv) முக்கோணி எண்கள்
(v) மிகப் பெரிய 10 நிறைவெண்கள்.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களையும் எழுதி அவற்றின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.
(i) A = {0 இலிருந்து 20 வரையுள்ள 5 இன் மடங்குகள்}
(ii) B = {"RECONCILIATION" என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள்}
(iii) C = {2 இற்கும் 13 இற்கும் இடையிலுள்ள முதன்மை எண்கள்}
(iv) D = {இரு முதன்மை எண்களின் பெருக்கமாக எழுதக்கூடிய 0 இற்கும் 20 இற்கும் இடையிலுள்ள நிறைவெண்கள்}

3. E = {5 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள முழு எண்கள்} இத்தொடைக்கேற்ப,
(i) E இன் மூலகங்களை எழுதுக.
(ii) $n(E)$ ஐக் காண்க.

4. சூனியத் தொடைக்கு 3 உதாரணங்கள் தருக. அவை சூனியத்தொடை ஆவதற்குரிய பண்பைத் தெளிவாகத் தருக.

22.1 முடிவுள்ள தொடைகள், முடிவிலித் தொடைகள், சம தொடைகள், சமவலுத் தொடைகள்

● முடிவுள்ள தொடைகளும் முடிவிலித் தொடைகளும்

மூலகங்களை உறுதியாக அறிந்து கொள்ளக்கூடிய பொதுப் பண்பு ஒன்றின் மூலம் எழுதப்பட்டுள்ள இரண்டு தொடைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

A = {0 இற்கும் 20 இற்கும் இடையிலுள்ள 3 இன் மடங்குகள்}
B = {5 இன் மடங்குகள்}

இவ்வொவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களையும் சங்கிலி அடைப்பினுள்ளே எழுதுவோம்.

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
$B = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

மேலே தரப்பட்டுள்ள தொடை A இன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். இதற்கேற்ப இதன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியான ஓர் எண்ணினால் குறிப்பிட முடியும். இவ்வாறு மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூற முடியுமாயின் அவ்வாறான தொடைகள் **முடிவுள்ள தொடைகள்** எனப்படும்.

மேலேயுள்ள தொடை B இல் மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறமுடியாது. அதாவது இதன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை எல்லையற்றதாகும்.
தொடை B இன் மூலகங்களை எழுதும்போது இறுதியில் மூன்று குற்றுக்களை இடுவதன் மூலம் அதன் மூலகங்கள் எல்லையற்றன என்பது காட்டப்படுகின்றது. இவ்வாறு மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறமுடியாத தொடைகள் **முடிவிலித் தொடைகள்** எனப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களை எழுதி, அவை முடிவுள்ள தொடையா, முடிவிலித் தொடையா என எழுதுக.

(i) P = {30 இலும் குறைந்த 6 இன் மடங்குகள்}
(ii) Q = {பல்கோணிகள்}

(i) $P = \{6, 12, 18, 24\}$ $\quad n(P) = 4$
(ii) Q = {முக்கோணம், நாற்பக்கல், ஐங்கோணி, அறுகோணி....}

தொடை P இன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதாகையால் P ஒரு முடிவுள்ள தொடையாகும்.

தொடை Q இன் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது ஆகையால் Q ஒரு முடிவிலித் தொடை ஆகும்.

• சம தொடைகள்

கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு தொடைகளையும் கவனத்தில் கொள்க.

A = {0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள இரட்டை எண்கள்}

B = {48268 என்னும் எண்ணில் அமைந்துள்ள இலக்கங்கள்}

மேற்குறித்த இரண்டு தொடைகளினதும் மூலகங்களை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$A = \{2, 4, 6, 8\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$

A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளும் ஒன்றுக்கொன்று வித்தியாசமான இரண்டு முறைகளில் கூறப்பட்டிருப்பினும் அவற்றை மூலகங்களுடன் எழுதும்போது இரண்டுக்கும் ஒரே தொடையே பெறப்படுகின்றது. சமனான மூலகங்களைக் கொண்டுள்ள தொடைகள் **சமதொடைகள்** எனப்படும். இதற்கேற்ப A, B ஆகியன இரண்டும் சம தொடைகளாகும். A, B ஆகிய இரு தொடைகளும் சமனாயின் அது $A = B$ என எழுதப்படும்.

• சமவலுத் தொடைகள்

A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை சமனாக இருப்பின், அதாவது $n(A) = n(B)$ ஆயின் அப்போது A, B ஆகிய தொடைகள் **சமவலுத் தொடைகள்** எனப்படும். A, B ஆகிய தொடைகள் சமவலுத் தொடைகளாயின் அது $A \sim B$ என வகைகுறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 2

X = {0 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள ஒற்றை எண்கள்}
Y = {ஆங்கில அரிச்சுவடியில் உயிர் எழுத்துகள்}

இத்தொடைகளின் மூலகங்களை எழுதி, அவை சமவலுத் தொடைகள் எனக் காட்டுக.

$X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $n(X) = 5$

$Y = \{a, e, i, o, u\}$ $n(Y) = 5$

$n(X) = n(Y)$ ஆகையால் X, Y ஆகியன சமவலுத் தொடைகளாகும்.

குறிப்பு

சமதொடைச் சோடிகள் எல்லாம் சமவலுத் தொடைகளாகவும் காணப்படும். ஆனால் சமவலுத் தொடைச் சோடிகள் எல்லாம் சம தொடைகள் ஆகக் காணப்பட மாட்டாது.

பயிற்சி 22.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளிலிருந்து முடிவுள்ள தொடை, முடிவிலித் தொடை ஆகியவற்றை வேறாக்கி எழுதுக.

   (i) A = {0 இலிருந்து 50 வரையுள்ள 5 இன் மடங்குகள்}
   (ii) B = {நிறைவெண்கள்}
   (iii) C = {0, 1 ஆகியவற்றை மாத்திரம் பயன்படுத்தி எழுதக்கூடிய எண்கள்}
   (iv) D = {25265 என்னும் எண்ணில் அமைந்துள்ள இலக்கங்கள்}
   (v) E = {முதன்மை எண் அல்லாத நேர் நிறைவெண்கள்}

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களை எழுதி, அதிலிருந்து சமதொடைச் சோடிகளையும் சமவலுத் தொடைச் சோடிகளையும் தெரிந்து எழுதுக.
   P = {10 இலும் குறைந்த 3 இன் நேர் மடங்குகள்}
   Q = {திகதி என்னும் சொல்லில் அமைந்துள்ள எழுத்துகள்}
   R = {0 இலிருந்து 10 வரையுள்ள ஒற்றை எண்கள்}
   S = {3693 என்னும் எண்ணில் அமைந்துள்ள இலக்கங்கள்}
   T = {ஆங்கில அரிச்சுவடியில் உள்ள உயிரெழுத்துகள்}
   V = {"கனவு" என்னும் சொல்லில் அமைந்துள்ள எழுத்துகள்}

3. முடிவுள்ள தொடைகளுக்கு மூன்று உதாரணங்களை எழுதுக.

4. முடிவிலித் தொடைகளுக்கு மூன்று உதாரணங்களை எழுதுக.

5. {2, 3 } என்னும் தொடைக்கு மூன்று சமதொடைகளை எழுதுக.

22.2 தொடைப் பிரிவும் அகிலத் தொடையும்

• தொடைப் பிரிவு

A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளைக் கருத்தில் கொள்ளும்போது தொடை B இன் எல்லா மூலகங்களும் தொடை A இல் அடங்கியிருப்பின், அப்போது தொடை B ஆனது தொடை A இன் **தொடைப் பிரிவு** எனப்படும்.
உதாரணமாக மூலகங்களுடன் தரப்பட்டுள்ள பின்வரும் இரண்டு தொடைகளையும் கருதுவோம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad$ $B = \{2, 4, 6\}$

இங்கு தொடை B இன் எல்லா மூலகங்களும் தொடை A இல் அடங்குவதால் தொடை B ஆனது தொடை A இன் தொடைப் பிரிவு ஆகும். இது $B \subset A$ என அல்லது $A \supset B$ எனக் குறிக்கப்படும்.
$B \subset A$ என்பது "**B தொடைப் பிரிவு A இன்**" என வாசிக்கப்படும்.

இப்போது $C = \{2, 4, 7\}$ இல் காணப்படும் எல்லா மூலகங்களும் A இல் காணப்படவில்லை. ஆகவே C ஆனது A இன் ஒரு தொடைப் பிரிவு அல்ல. இது $C \not\subset A$ எனக் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையினதும் மூலகங்களை எழுதுவதன் மூலம் தொடைப் பிரிவைக் காண்க.

P = {0 இற்கும் 20இற்கும் இடையில் உள்ள 6 இன் மடங்குகள் }
Q = {0 இற்கும் 20 இற்கும் இடையில் உள்ள 3 இன் மடங்குகள்}

$P = \{6, 12, 18\}$
$Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

தொடை P இன் எல்லா மூலகங்களும் Q இல் அடங்கியுள்ளதால் $P \subset Q$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

$X = \{1, 2\}$ இன் எல்லாத் தொடைப் பிரிவுகளையும் எழுதுக.

$\{1\}$, $\{2\}$ ஆகியன X இன் இரண்டு தொடைப் பிரிவுகளாகும் என்பது மிகத் தெளிவானதாகும். மேலும் $\{1, 2\}$ என்னும் தொடையும் அதன் ஒரு தொடைப் பிரிவாகின்றது என்பதை அவதானிக்க.

குறிப்பு

A, B என்பன சம தொடைகளாக இருப்பின் A ஆனது B இன் தொடைப் பிரிவாகவும் B ஆனது A இன் தொடைப் பிரிவாகவும் அமைகின்றது. மேலும் சூனியத் தொடையும் எந்தவொரு தொடையினதும் தொடைபிரிவாக அமையும்.

தொடை ஒன்றிற்கு சூனியத் தொடையும் சம தொடையும் எப்போதும் தொடைப் பிரிவுகள் ஆவதால் $\{\}$, $\{1, 2\}$ ஆகியனவும் மேற்குறித்த தொடை X இன் தொடைப் பிரிவுகளாகும்.
இதற்கேற்ப, மேற்குறித்த தொடை X இற்குத் தொடைப் பிரிவுகள் 4 உள்ளதுடன், அவை $\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ ஆகியனவாகும்.

உதாரணம் 3

$Y = \{3, 5, 7\}$ என்னும் தொடையின் எல்லாத் தொடைப் பிரிவுகளையும் எழுதுக.

$\{\ \}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}$
ஆகவே இத்தொடைக்கு 8 தொடைப் பிரிவுகள் உண்டு.

• அகிலத் தொடை

உமது பாடசாலையிலுள்ள மாணவர்கள் பற்றிச் செய்யப்பட்ட ஓர் ஆய்வில் அப்பாட சாலையின் மாணவர்கள் என்ற தொடைக்குப் பல்வேறு தொடைப் பிரிவுகளைக் கவனத்தில் எடுத்துக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக,
{தரம் 9 இன் மாணவர்கள்}
{மாணவிகள்}
{இவ்வாண்டில் க.பொ.த. சா. தரப் பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவர்கள்}
ஆகியவை அவற்றில் சிலவாகும்.
இங்கு மேலே கவனத்தில் கொள்ளப்படும் எல்லா மூலகங்களையும் உள்ளடக்கிய தொடை, உமது பாடசாலையிலுள்ள எல்லா மாணவர்கள் என்னும் தொடையாகும். இத்தொடையானது இக்கற்றலுக்குரிய அகிலத் தொடையாகும். இனி, இன்னோர் உதாரணத்தைக் கவனிப்போம்.

இரட்டை எண்கள், ஒற்றை எண்கள், முக்கோணி எண்கள், முதன்மை எண்கள் ஆகியன பற்றிய கற்றலில் இத்தொடைகள் யாவற்றையும் நிறைவெண் தொடையின் தொடைப் பிரிவுகளாகக் கருதலாம்.

ஆகவே தரப்பட்டுள்ள தொடைப் பிரிவுகளைக் கொண்டுள்ள தொடை அத்தொடைகளின் **அகிலத் தொடை** எனப்படும். அகிலத் தொடை **ε** இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும்.

இன்னோர் உதாரணமாக, சதுரமுகி வடிவத்திலான ஒரு தாயக்கட்டையில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ளன. இத்தாயக்கட்டையை ஒரு தடவை உருட்டும்போது கிடைக்கத்தக்க ஈட்டுகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகும். எனவே, இத்தாயக் கட்டையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் பேறுகளின் தொடை $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ஆகும். இத்தொடையானது ஒரு தாயக்கட்டையை உருட்டும்போது பெறப்படும் பேறுகளின் அகிலத் தொடையாகும். இதனை $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என எழுதிக் காட்டலாம். இவ்வகிலத் தொடையின் சில தொடைப் பிரிவுகளைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

A = {ஒற்றை எண் ஒன்று கிடைத்தல்}
$A = \{1, 3, 5\}$
B = {4இலும் கூடிய ஒரு பெறுமானம் கிடைத்தல்}
$B = \{5, 6\}$
C = {ஓர் இரட்டை முதன்மை எண் கிடைத்தல்}
$C = \{2\}$

உதாரணம் 1

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ என்னும் தொடைக்கான ஓர் அகிலத் தொடையை எழுதுக.
ε = {1 இற்கும் 10 இற்கும் இடையிலுள்ள எண்கள்}

பயிற்சி 22.2

1. $A = \{2, 5, 8, 10, 13\}$ என்னும் தொடையின் எவையேனும் 8 தொடைப் பிரிவுகளை எழுதுக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூற்றும் சரியானதா எனக் கூறுக.
   (i) $\{1, 2, 3\} \subset$ {5ஆல் வகுபடும் எண்கள் }
   (ii) $\{4, 9, 16\} \subset$ {சதுர எண்கள்}
   (iii) {உருளை} $\subset$ {பல்கோணிகள்}
   (iv) {சிவப்பு} $\subset$ {வானவில்லிலுள்ள நிறங்கள்}
   (v) {$2x - 1 = 7$இன் தீர்வு} $\subset$ {இரட்டை எண்கள்}

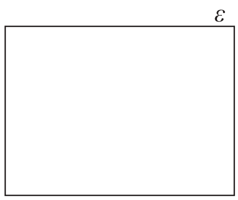
3. $A = \{a, e, i, o, u\}$ இற்கு அகிலத் தொடை ஒன்று எழுதுக.

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வாரு பகுதியிலும் உள்ள தொடைப் பிரிவுகளின் கூட்டம் ஓர் அகிலத் தொடையின் தொடைப் பிரிவாக அமையுமாயின், அவ்வகிலத் தொடையை எழுதுக.
   (i) $\{5, 10, 15, 20, 25\}$, $\{10, 100, 100, ...\}$
   (ii) {எழுத்தறிவு 90% இலும் கூடிய நாடுகள்}, {ஒரு சமுத்திரத்தினால் எல்லைப்படாத நாடுகள்}
   (iii) {ஜனவரி, மார்ச், மே, ஒகஸ்ட்}, {31 நாட்களைக் கொண்ட மாதங்கள்}, {உமது குடும்பத்தில் உள்ள ஒருவரின் பிறந்த நாள் அமையும் மாதம்}

வென் வரிப்படங்கள்

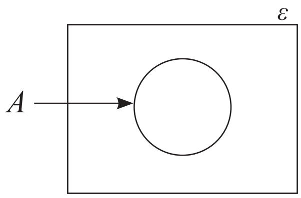
ஒரு தொடையை வென் வரிப்படத்தில் குறிக்கும் முறையை முன்னைய வகுப்புகளில் கற்றுள்ளீர்கள். இங்கு தொடைகள் மூடிய உருவங்களின் மூலம் குறிக்கப்படும்.

வென் வரிப்படங்களை வரையும்போது அகிலத் தொடை ஒரு செவ்வகத்தினுள்ளே பின்வருமாறு குறித்துக் காட்டப்படும்.



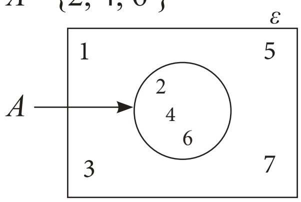
அகிலத் தொடையின் தொடைப் பிரிவுகள் வளைந்த கோட்டிலான மூடிய உருக்களினால் (வட்டம், நீள்வட்டம் போன்றவை) காட்டப்படும்.

ஒரு தொடைப் பிரிவுடன் கூடிய அகிலத் தொடை ஒன்றின் வென் வரிப்படம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



உதாரணம் 1

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{2, 4, 6\}$



22.3 தொடைகளின் இடைவெட்டும் ஒன்றிப்பும்

- **தொடைகளின் இடைவெட்டு**

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளைக் கருதும்போது அவற்றின் பொது மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை **இடைவெட்டுத் தொடை** எனப்படும்.

A, B என்னும் இரண்டு தொடைகளின் இடைவெட்டுத் தொடையானது $A \cap B$ இனால் வகைகுறிக்கப்படும்.

இதனை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் பார்ப்போம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$B = \{2, 5, 6, 7\}$

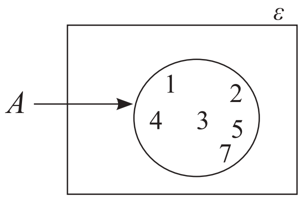
$\therefore A, B$ ஆகிய தொடைகளின் பொது மூலகங்கள் $\{2, 5, 7\}$ ஆகும்.

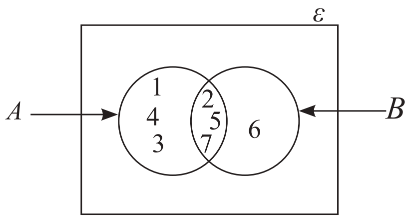
$\therefore A \cap B = \{2, 5, 7\}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

இடைவெட்டுத் தொடையும் ஒரு தொடையாகும். ஆகவே இதனையும் நாம் தொடைகளை வகைகுறிக்கும் முறையில் எழுதலாம்.

உதாரணமாக மேலே உள்ள தொடைகளைக் கருதுக.

- $A \cap B$ என்னும் தொடை $\{A$ இலும் B இலும் காணப்படும் மூலகங்கள்$\}$
- $A \cap B = \{2, 5, 7\}$
- வென் வரிப்படம்
  இங்கே நாம் முதலில் தொடை A ஐக் குறிப்போம்.

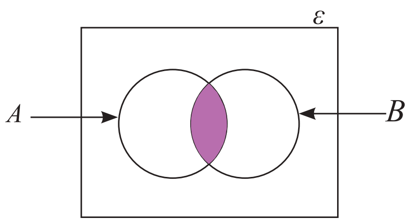




$A \cap B$

2, 5, 7 என்னும் மூலகங்கள் B இலும் காணப்படுகின்றன. ஆனால் தொடையில் ஒரு மூலகம் ஒரு தடவை மட்டுமே எழுதப்படுவதால் B ஆனது A உடன் தொடர்புற்று உருவில் காட்டப்பட்டது போன்று வரையப்படும்.

$\therefore$ ஆகவே $A \cap B$ என்னும் தொடைக்குரிய தொடைப் பிரதேசம் பின்வருமாறாகும்.



$A \cap B$

மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் இடைவெட்டுத் தொடைகளைக் காண்போம்.

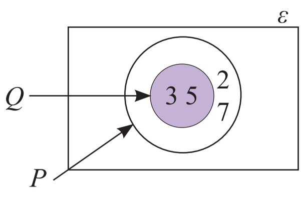
உதாரணம் 1

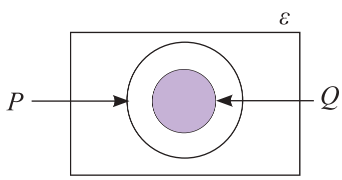
$P = \{2, 3, 5, 7\}$

$Q = \{3, 5\}$

$P \cap Q = \{3, 5\} = Q$

இங்கே தொடை Q ஆனது தொடை P இன் தொடைப் பிரிவாகும். $P \cap Q = Q$ ஆக அமைகின்றது. இதனை வென் வரிப்படத்தில் குறித்தால்

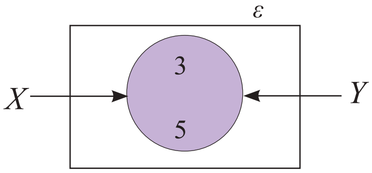




$P \cap Q = Q$

உதாரணம் 2

$X = \{3, 5\}$
$Y = \{$ 15 இன் முதன்மைக் காரணிகள்$\}$
$Y = \{3, 5\}$
$X \cap Y = \{3, 5\}$

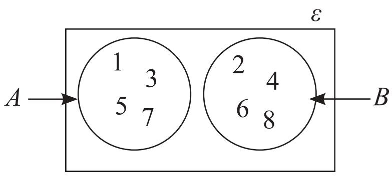


$X \cap Y = X = Y$

இங்கு X உம் Y உம் சமதொடைகள் ஆகும்.

உதாரணம் 3

$A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$
இங்கே A இற்கும் B இற்கும் பொதுவான மூலகங்கள் எவையும் இல்லை. ஆகவே $A \cap B$ சூனியத் தொடை ஆகும். அதாவது $A \cap B = \{ \}$ ஆகும்.
இதை வென் வரிப்படத்தின் மூலம் குறித்தால்



$A \cap B = \{ \}$

இவ்வாறான சந்தர்ப்பத்தில் A உம் B உம் **மூட்டற்ற தொடைகள்** எனப்படும்.

• தொடைகளின் ஒன்றிப்பு

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளைக் கருதும்போது அத்தொடைகளில் காணப்படும் எல்லா மூலகங்களையும் கொண்ட தொடை **ஒன்றிப்புத் தொடை** எனப்படும்.

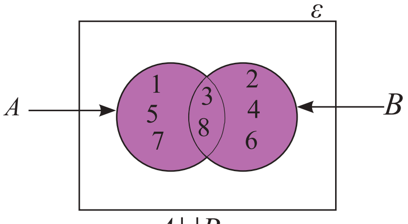
A, B ஆகிய இரண்டு தொடைகளையும் கருதும்போது A, B ஆகியவற்றின் ஒன்றிப்புத் தொடையானது $A \cup B$ இனால் வகைகுறிக்கப்படும்.
இதனை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் பார்ப்போம்.

$A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$
$B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ஆகும்.

ஒன்றிப்புத் தொடையும் ஒரு தொடையாகும். ஆகவே இதனையும் நாம் தொடைகளை வகைகுறிக்கும் வகையில் எழுதலாம். உதாரணமாக மேலே பார்த்த தொடைகளைக் கருதுவோம்.

$A \cup B$ ={A இல் அல்லது B இல் காணப்படும் மூலகங்கள் }
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$



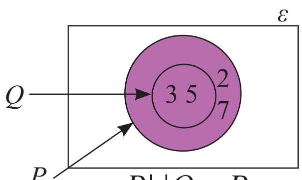
$A \cup B$

இங்கே A இல் காணப்படும் மூலகங்கள் அல்லது B இல் காணப்படும் மூலகங்கள் கொண்ட தொடை ஆகையால் A, B இனால் காட்டப்படும் முழுப் பிரதேசத்தையும் $A \cup B$ குறிக்கும். மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் ஒன்றிப்புத் தொடையை பார்ப்போம்.

உதாரணம் 4

$P = \{2, 3, 5, 7\}$
$Q = \{3, 5\}$
$P \cup Q = \{2, 3, 5, 7\} = P$

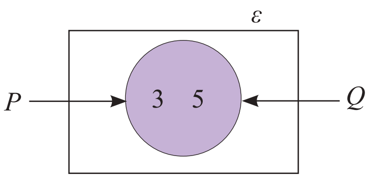
இங்கே Q ஆனது தொடை P இன் தொடைப் பிரிவாகும். அப்போது ஒன்றிப்பானது பெரிய தொடையான P இற்கும் சமனாகின்றது. இதனை வென் வரிப்படத்தில் குறித்தால்



$P \cup Q = P$

உதாரணம் 5

$X = \{3, 5\}$
Y ={15 இன் முதன்மைக் காரணிகள்} = {3, 5}
$X \cup Y = \{3, 5\} = X = Y$



$X \cup Y = X = Y$

இங்கே தொடை X உம் தொடை Y உம் சம தொடைகள் ஆகும். ஆகவே ஒன்றிப்புத் தொடையும் அவற்றுக்குச் சமமான தொடையாக அமைகின்றது.

குறிப்பு

சம தொடைகள் இரண்டின் இடைவெட்டுத் தொடையும் ஒன்றிப்புத் தொடையும் தரப்பட்ட தொடைகளுக்குச் சமனான தொடைகளாகும்.

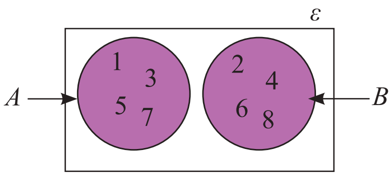
உதாரணம் 6

$A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

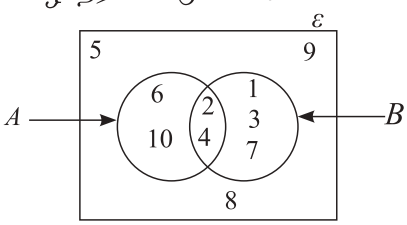
இதை வென் வரிப்படத்தில் குறித்தல்



$A \cup B$

உதாரணம் 7

கீழே தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்திலிருந்து வினாக்களுக்கு விடை எழுதுக.



(i) தொடை A இன் மூலகங்களை எழுதுக.

(ii) தொடை B இன் மூலகங்களை எழுதுக.

(iii) அகிலத் தொடையின் மூலகங்களை எழுதுக.

(iv) $A \cap B$ இன் மூலகங்களை எழுதுக.

(v) $A \cup B$ இன் மூலகங்களை எழுதுக.

(i) $A = \{2, 4, 6, 10\}$

(ii) $B = \{2, 4, 1, 3, 7\}$

(iii) $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(iv) $A \cap B = \{2, 4\}$

(v) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10\}$

உதாரணம் 8

வகுப்பு ஒன்றில் உள்ள மாணவர்களிலிருந்து பின்வரும் தொடைகள் தெரிவு செய்யப்பட்டன.

A $=${கரப்பந்தை விளையாடும் மாணவர்கள்}

B $=${கிறிகெற்றை விளையாடும் மாணவர்கள்}

$A \cap B$ ஐயும் $A \cup B$ ஐயும் தருக.

$A \cap B$ $=${கரப்பந்தையும் கிறிகெற்றையும் விளையாடும் மாணவர்கள்}

$A \cup B$ $=${கரப்பந்தை அல்லது கிறிகெற்றை விளையாடும் மாணவர்கள்}

பயிற்சி 22.4

1. P, Q, R தொடைகள்

$P = \{1, 3, 6, 8, 10, 13\}$

$Q = \{1, 6, 7, 8\}$

$R = \{2, 3, 9, 10, 12\}$

எனத் தரப்பட்டுள்ளன. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங் களுடன் எழுதுக.

(i) $P \cap Q$ (ii) $P \cap R$ (iii) $Q \cap R$ (iv) $P \cup Q$ (v) $P \cup R$ (vi) $Q \cup R$

2. A $=${1இலிருந்து 12 வரையுள்ள எண்ணும் எண்கள்}

B $=${10 இலும் குறைந்த முதன்மை எண்கள்}

C $=${12 இன் காரணிகள்}

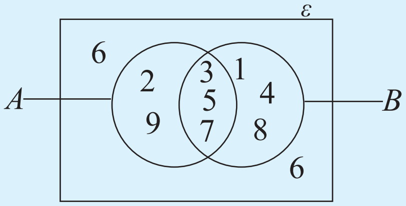
எனத் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) மேற்குறித்த ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(ii) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வாரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $B \cap C$ d. $A \cup B$ e. $A \cup C$ f. $B \cup C$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைக் கருதுக.



கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வாரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(i) A

(ii) B

(iii) $A \cup B$

(iv) $A \cap B$

22.1 தொடை ஒன்றின் நிரப்பி

ஓர் அகிலத் தொடையிலுள்ள தொடைப் பிரிவு A ஐக் கருதுவோம். A ஐச் சாராத அகிலத் தொடையினுள்ளே உள்ள எல்லா மூலகங்களையும் உள்ளடக்கிய தொடையானது தொடை A இன் **நிரப்பித் தொடை** எனப்படும்.

உதாரணமாகக் கீழே உள்ள தொடைகளைக் கருதுவோம்.
$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{2, 4, 6\}$
எனக் கொள்ளும்போது தொடை A ஐச் சாராத, அகிலத் தொடையினுள்ளே உள்ள எஞ்சிய மூலகங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$\{1, 3, 5, 7\}$
இது தொடை A இன் நிரப்பித் தொடையாகும். தொடை A இன் நிரப்பியானது A' இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படும். அதனை
$A' = \{1, 3, 5, 7\}$ என எழுதலாம்.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள அகிலத் தொடை (ε), அதன் தொடைப்பிரிவு B ஆகியவற்றைக் கருதித் தொடை B' ஐ மூலகங்களுடன் எழுதுக.

$\varepsilon = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$
$B = \{10, 20, 30\}$

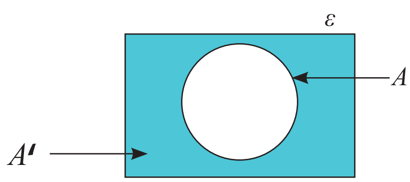
$B' = \{5, 15, 25, 35\}$

உதாரணம் 2

ε = {பறவைகள்}
P = {கூடு கட்டும் பறவைகள்} ஆயின் P' ஐ விவரிக்க.
P' = {கூடு கட்டாத பறவைகள்}

இனி தொடைகளின் நிரப்பியை வென் வரிப்படத்தின் மூலம் காட்டும் முறையைக் கவனிப்போம்.

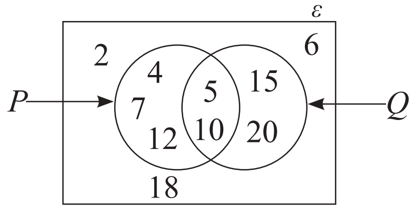
A என்பது ஓர் அகிலத் தொடையின் (ε) ஒரு தொடைப் பிரிவாயின், அதனை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் இவ்வாறு காட்டலாம்.



A' என்பது A ஐச் சாராத ε இன் எஞ்சிய மூலகங்கள் ஆகையால் தொடை A ஐத் தவிர எஞ்சிய பிரதேசம் A' ஐச் சார்ந்ததாகும்.

உதாரணம் 3

வென் வரிப்படத்திற்கேற்பக் கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றைக் காண்க.



(i) P' (ii) Q'

(iii) $(P \cap Q)$ (iv) $(P \cup Q)$

(i) $P' = \{2, 6, 15, 18, 20\}$ (ii) $Q' = \{2, 4, 6, 7, 12, 18\}$

(iii) $(P \cap Q) = \{5, 10\}$ (iv) $(P \cup Q) = \{4, 5, 7, 12, 15, 20, 10\}$

பயிற்சி 22.5

1. ε = {மாலினி, மீரா, சீதா, ராஜா, பிரபு}
A = {மாலினி, ராஜா}
B = {மீரா, சீதா, பிரபு}
C = {மாலினி, சீதா, ராஜா}

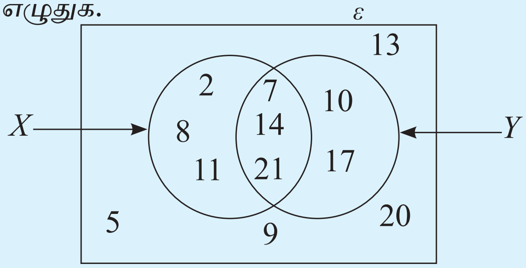
இதற்கேற்ப கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(i) A' (ii) B' (iii) C' (iv) $A \cap C$

2. $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $P = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$, $Q = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ ஆயின் ε, P, Q ஆகியவற்றை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறித்து அதிலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தொடையையும் மூலகங்களுடன் எழுதுக.

(i) P' (ii) Q' (iii) $P \cap Q$ (iv) $P \cup Q$

3. தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்திலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடையை மூலகங்களுடன் எழுதுக.



(i) X (ii) Y (iii) $X \cap Y$

(iv) $X \cup Y$ (v) X' (vi) Y'

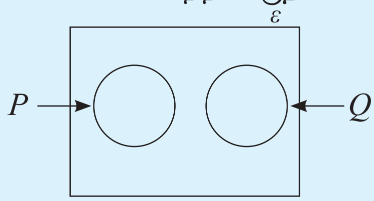
பலவினப் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளை வென் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

$\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \}$

$P = \{2, 4, 6\}$

$Q = \{1, 5, 8\}$



கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளை வென் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

a. $P \cap Q$

b. $P \cup Q$

c. P'

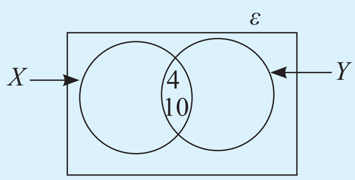
d. Q'

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளை தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைப் பிரதிசெய்து குறிக்க.

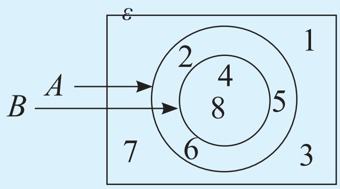
$\varepsilon = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12 \}$

$P = \{2, 4, 10\}$

$Q = \{3, 4, 8, 10\}$



3. தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி கீழேயுள்ள வினாக்களுக்கு விடையளிக்க.



கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளின் மூலகங்களை எழுதுக.

(i) A (ii) B (iii) ε

(iv) $A \cap B$ (v) $A \cup B$ (vi) A'

பொழிப்பு

- மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறக்கூடிய தொடைகள் முடிவுள்ள தொடைகளாகும்.
- மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை உறுதியாகக் கூறமுடியாத தொடைகள் முடிவில் தொடைகளாகும்.
- சமனான மூலகங்களைக் கொண்ட தொடைகள் சம தொடைகள் எனப்படும்.
- மூலகங்களின் எண்ணிக்கை சமனான தொடைகள் சமவலுத் தொடைகள் எனப்படும்.
- யாதாயினுமொரு சந்தர்ப்பத்தில் கவனத்தில் கொள்ளப்படும் எல்லா மூலகங்களையும் உள்ளடக்கிய தொடை அகிலத் தொடை எனப்படும்.
- இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளின் பொதுவான மூலகங்களைக் கொண்ட தொடை இடைவெட்டுத் தொடை எனப்படும்.
- இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடைகளின் எல்லா மூலகங்களையும் கொண்ட தொடை ஒன்றிப்புத் தொடை எனப்படும்.

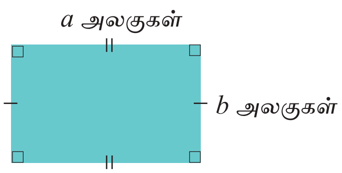
23 பரப்பளவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்
- ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கும்
- ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கும்
- ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கும்

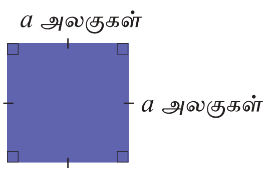
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

பரப்பளவு

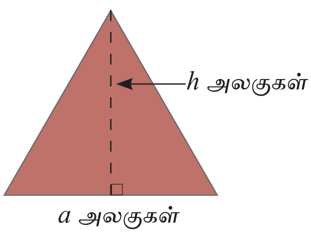
ஒரு மேற்பரப்பு பரம்பியுள்ள அளவைக் குறிப்பிடும் ஒரு கணியமாகப் பரப்பளவை அறிமுகப்படுத்தலாம். இதற்கேற்ப தரம் 7, தரம் 8 ஆகியவற்றில் நீங்கள் பரப்பளவு தொடர்பாகக் கற்றவற்றை மீண்டும் நினைவுகூர்வோம்.



நீளம் a அலகுகளும் அகலம் b அலகுகளும் உள்ள செவ்வக வடிவத்திலான ஓர் அடரின் பரப்பளவை A சதுர அலகுகள் எனக் குறிக்கும்போது $A = a \times b$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.



ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a அலகுகளை உடைய சதுர வடிவத்திலான ஓர் அடரின் பரப்பளவை A சதுர அலகுகள் எனக் கொள்ளும்போது $A = a^2$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

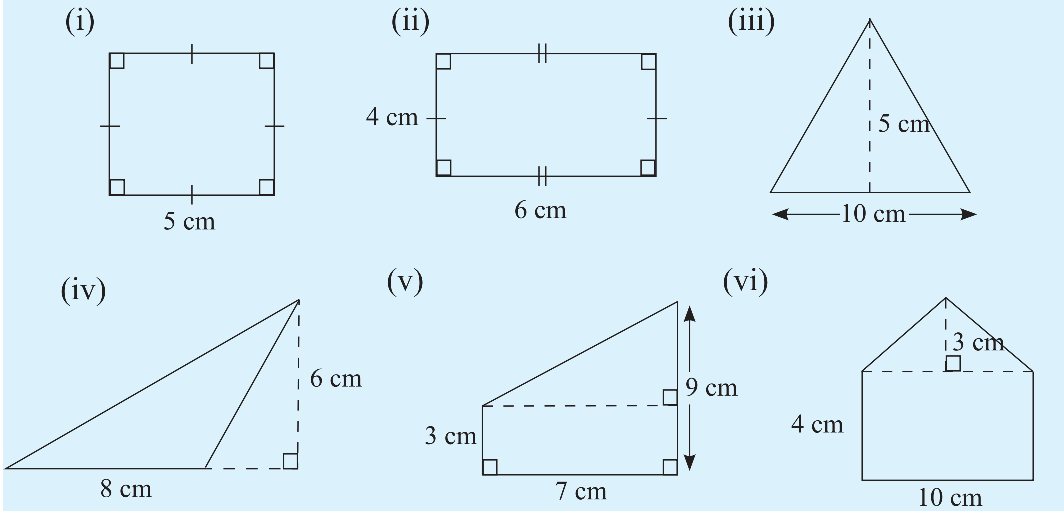


அடியின் நீளம் a அலகுகளும் அதற்கொத்த செங்குத்து உயரம் h அலகுகளும் உள்ள ஒரு முக்கோண அடரின் பரப்பளவை A சதுர அலகுகள் எனக் குறிக்கும்போது $A = \frac{1}{2} \times a \times h$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

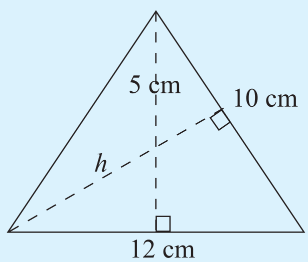
நீங்கள் கற்றுள்ள இவ்விடயங்களை மேலும் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தளவுருவினதும் பரப்பளவைக் காண்க.



2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணியில் 12 cm அடிக்குரிய செங்குத்துயரம் 5 cm உம் 10 cm அடிக்குரிய செங்குத்துயரம் h cm உம் ஆகும்.
   (i) முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.
   (ii) h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

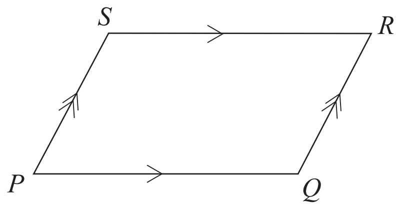


3. (*a*) 12 cm பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி வடிவத்திலான அடரின் சுற்றளவு யாது?
   (*b*) இச்சுற்றளவுக்குச் சமனான சுற்றளவு உடைய சதுர வடிவத்திலான ஓர் அடரின்
      (i) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் யாது?
      (ii) சதுர வடிவத்திலான அடரின் பரப்பளவைக் காண்க.

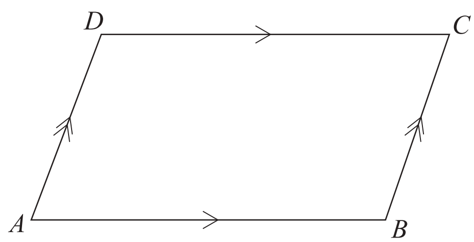
ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு

எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாகவுள்ள ஒரு நாற்பக்கல் **இணைகரம்** எனப்படும். மேலும், ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனாகும் என நாம் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளோம். இதற்கேற்ப, கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் இணைகரம் $PQRS$ இல்

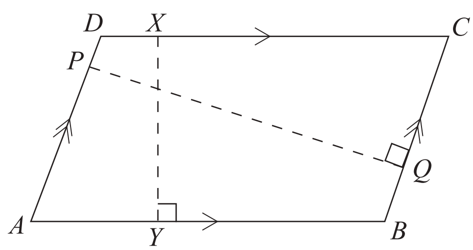
$PQ // SR$, $PS // QR$ ஆகும்.
$PQ = SR$, $PS = QR$ ஆகும்.



23.1 ஓர் இணைகரத்தின் அடியும் செங்குத்து உயரமும்



உருவில் தரப்பட்டுள்ள இணைகரத்தில் எந்தவொரு பக்கத்தையும் அதன் அடியாகக் கொள்ளலாம். ஒவ்வோர் அடிக்கும் ஒத்ததாக இணைகரத்தின் செங்குத்துயரம் வரையறுக்கப்படும் முறை கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

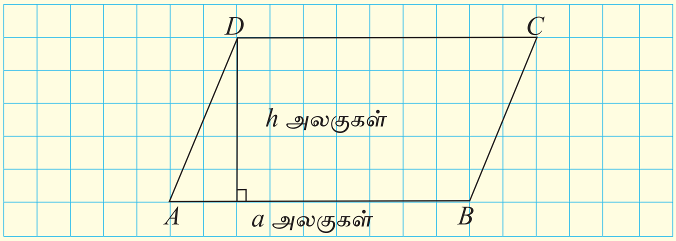


இணைகரத்தின் அடியாக AB ஐக் கொள்ளும்போது அடி AB உம் அதற்கு எதிர்ப் பக்கமாகிய DC உம் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவை ஆகும். இந்த இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துயரம் உருவுக்கேற்ப XY ஆகும். XY என்பது அடி AB இற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் ஆகும். மேலும், அடியாக BC ஐக் கொள்ளும்போதும் BC, AD ஆகிய சமாந்தர கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம் உருவின்படி PQ ஆகும். PQ என்பது அடி BC இற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் ஆகும்.

ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்கும் முறையைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டினூடாகப் புரிந்துகொள்வோம்.

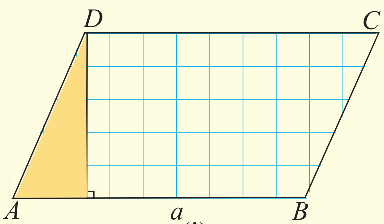
செயற்பாடு 1

படி 1: உங்களுடைய பயிற்சிப் புத்தகத்தின் சதுரக்கோட்டுத் தாள் ஒன்றில் நேர்விளிம்பையும் மூலைமட்டத்தையும் பயன்படுத்திக் கீழே உருவில் காட்டியவாறான இணைகரம் ஒன்றை வரையுங்கள்.

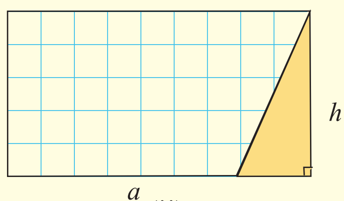


படி 2: வேறொரு சதுரக் கோட்டுத் தாளில் அதே அளவுள்ள இன்னுமொரு இணைகரத்தை வரைந்து இணைகர அடரை வெட்டி வேறாக்குக.

படி 3: உருவிலுள்ள நிழற்றப்பட்ட செங்கோண முக்கோணப் பகுதியை வெட்டி வேறாக்குக.



உரு (i)



உரு (ii)

படி 4: வெட்டியெடுத்த முக்கோண வடிவப் பகுதியை உருவிலுள்ளவாறு வைத்துப் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் ஒட்டுக. இப்போது நீங்கள் உரு (ii) இல் காட்டப்பட்டவாறான ஒரு செவ்வகத்தைப் பெற்றிருப்பீர்கள்.

படி 5: இப்போது நீங்கள் பெற்ற செவ்கத்தின் பரப்பளவை a, h ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

இணைகரத்தின் பரப்பளவும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவும் ஒன்றுக்கொன்று சமனானவை என்பதைப் புரிந்திருப்பீர்கள்.

இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு = செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

= $a \times h$ சதுர அலகுகள்

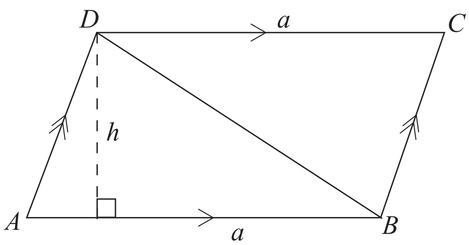
இங்கு h என்பது அடி AB இற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் என்பதை அவதானிக்க.

இவ்விடயங்களிற்கு ஏற்ப, ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவுக்கான ஒரு சூத்திரத்தைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு = பக்கத்தின் நீளம் × அப்பக்கத்துக்கு ஒத்த செங்குத்துயரம்

இனி, ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காணக்கூடிய இன்னொரு முறையை ஆராய்வோம்.

ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்பதன் மூலமும் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காணலாம்.



இணைகரம் $ABCD$ இல் அடி AB இன் நீளம் a அலகுகள் எனவும் அதற்கு ஒத்த செங்குத்துயரம் h அலகுகள் எனவும் கொள்வோம். மூலை விட்டம் DB இன் மூலம் இணைகரம் $ABCD$ ஆனது ABD, BCD என்னும் இரண்டு முக்கோணிகளாக வேறாக்கப்படுகிறது.

முக்கோணி ABD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times a \times h$

முக்கோணி BCD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times a \times h$ ($AB = DC$ ஆகையால்)

இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $= \Delta ABD$ இன் பரப்பளவு $+ \Delta BCD$ இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times a \times h + \frac{1}{2} \times a \times h$$

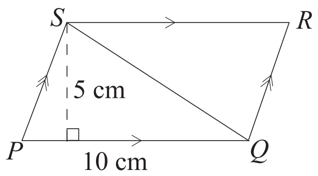
$$= \frac{ah}{2} + \frac{ah}{2}$$

$$= ah$$

∴ இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $\boldsymbol{ah}$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

உதாரணம் 1

இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



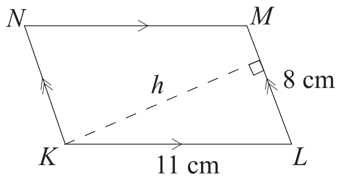
இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= 10 \times 5$

$= 50$

$\therefore$ இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 50 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

இணைகரம் $KLMN$ இன் பரப்பளவு 48 cm^2 ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



இணைகரம் $KLMN$ இன் பரப்பளவு $= 48 \text{ cm}^2$

எனவே $8 \times h = 48$

$$h = \frac{48}{8}$$

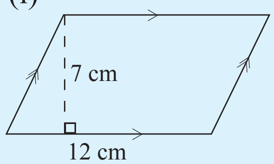
$$h = 6$$

அதாவது $h = 6$ cm ஆகும்

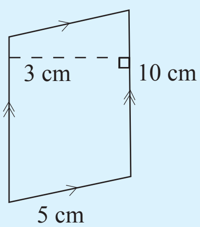
பயிற்சி 23.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் பரப்பளவைக் காண்க.

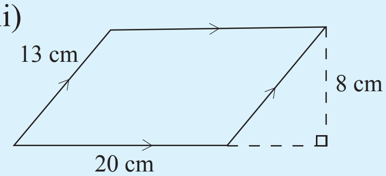
(i)



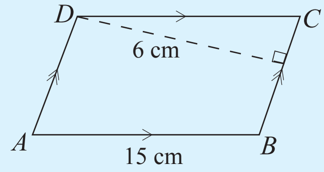
(ii)



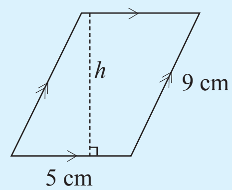
(iii)



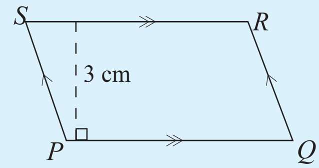
2. இணைகரம் $ABCD$ இன் சுற்றளவு 52 cm ஆயின், இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.



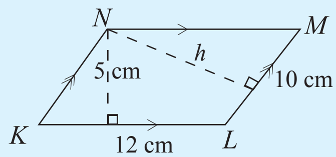
3. இணைகரத்தின் பரப்பளவு 35 cm^2 ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



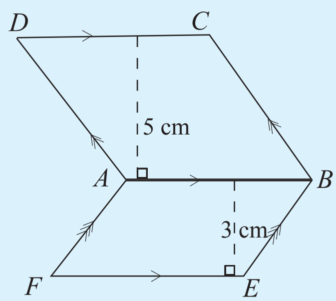
4. இணைகரத்தின் பரப்பளவு 105 cm^2 ஆயின், பக்கம் PQ இன் நீளத்தைக் கணிக்க.



5. உருவில் உள்ள தகல்களுக்கேற்ப
   (i) இணைகரம் $KLMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.
   (ii) h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

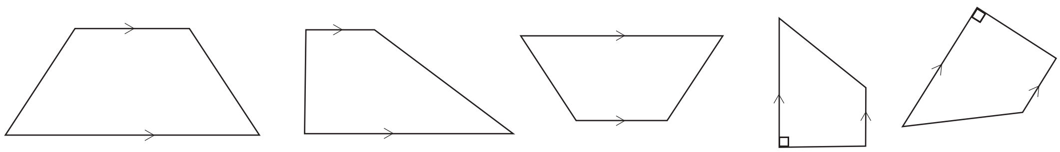


6. $ABCD$ இன் பரப்பளவு 30 cm^2 எனின், இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



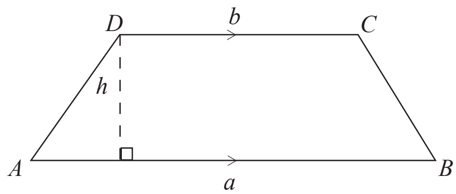
23.2 ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு

ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் மாத்திரம் சமாந்தரமாகவுள்ள ஒரு நாற்பக்கல் சரிவகம் எனப்படும். சரிவக வடிவத்திலான சில உருவங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

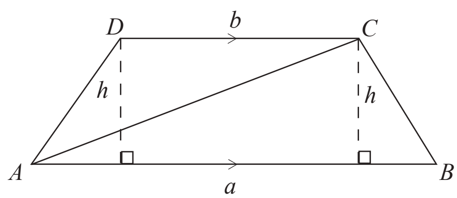


ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான ஒரு சூத்திரத்தை உருவாக்குவோம்.

உருவில் தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கலில் AB, DC ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே a அலகுகள், b அலகுகள் எனவும் அச்சமாந்தரப் பக்கங்கள் இரண்டுக்குமிடையிலான செங்குத்துத் தூரம் h அலகுகள் எனவும் கொள்வோம்.



இச்சரிவகத்தில் மூலைவிட்டம் AC ஐ வரைவதால் பெறப்படும் இரண்டு முக்கோணி களினதும் பரப்பளவுகளைக் கண்டு அவற்றைக் கூட்டுவதன் மூலம் சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் காண்போம்.



முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times AB \times h$

முக்கோணி ACD இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times DC \times h$

சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $= \Delta\ ABC$ இன் பரப்பளவு $+ \Delta\ ACD$ இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times AB \times h + \frac{1}{2} \times DC \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times (AB + DC)$$

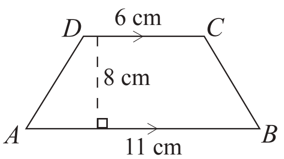
$$= \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times (a + b)\, h$$ ஆகும்.

ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ (சமாந்தரப் பக்கங்கள் இரண்டினதும் நீளங்களின் கூட்டுத் தொகை) $\times$ (சமாந்தரப் பக்கங்களுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம்)

உதாரணம் 1

சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



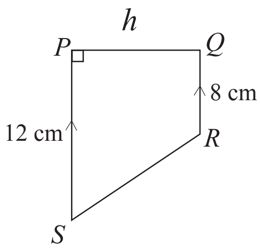
சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times (11 + 6) \times 8$

$$= \frac{1}{\cancel{2}_1} \times 17 \times \cancel{8}^4$$

$$= 68\ \text{cm}^2$$

உதாரணம் 2

சரிவகம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $70\ \text{cm}^2$ ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



சரிவகம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times (12 + 8) \times h$

$$= \frac{1}{\cancel{2}_1} \times \cancel{20}^{10} \times h$$

பரப்பளவு $70\ \text{cm}^2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்,

$$10h = 70$$

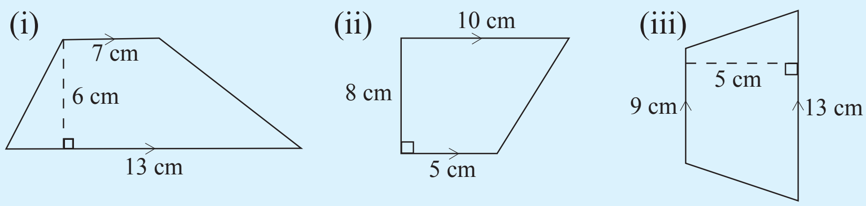
$$h = \frac{70}{10}$$

$$h = 7$$

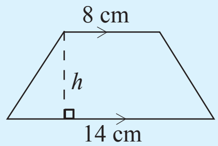
$\therefore\ h = 7$ cm ஆகும்.

பயிற்சி 23.2

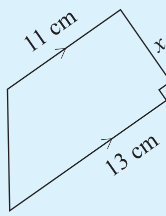
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சரிவகத்தினதும் பரப்பளவைக் காண்க.



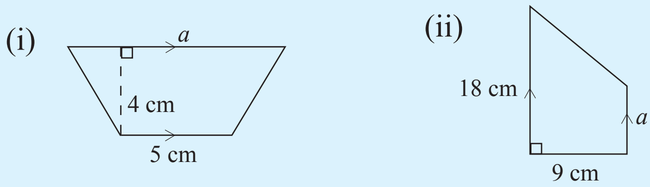
2. சரிவகத்தின் பரப்பளவு 88 cm^2 ஆயின், h இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



3. சரிவகத்தின் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆயின், x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



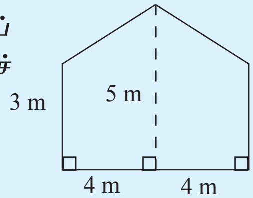
4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சரிவகத்திலும் அட்சரம் a இனால் காட்டப்பட்டுள்ள நீளத்தைக் காண்க. அவ்வச் சரிவகங்களின் பரப்பளவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



(i) பரப்பளவு 26 cm^2 ஆகும்

(ii) பரப்பளவு 135 cm^2 ஆகும்

5. ஒரு சுவரின் பக்கத் தோற்றம் ஒன்று உருவில் காட்டப் பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள அளவீடுகளுக்கேற்பச் சுவரின் பரப்பளவைக் காண்க.



6. ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு $30\ cm^2$ ஆகும். சமாந்தரப் பக்கங்களுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம் 3 cm ஆகும். சமாந்தரப் பக்கங்களின் நீளங்கள் எனக் கொள்ளக் கூடிய,
   (i) நிறைவெண் பெறுமானச் சோடிகள் 3 ஐயும்
   (ii) நிறைவெண் அல்லாத பெறுமானச் சோடிகள் 3 ஐயும் காண்க.

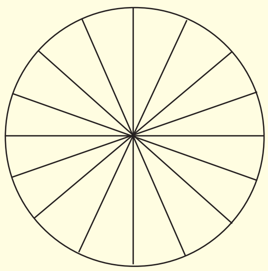
23.3 ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு

செவ்வகம், சதுரம், முக்கோணி, இணைகரம், சரிவகம் போன்ற வடிவங்களை உடைய அடர்களின் பரப்பளவைக் காணல் பற்றிக் கற்றுக் கொண்ட நாம் இப்போது வட்ட வடிவத்திலான அடர் ஒன்றின் பரப்பளவைக் காணும் முறையை ஆராய்வோம். அதற்காக முதலில் கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1

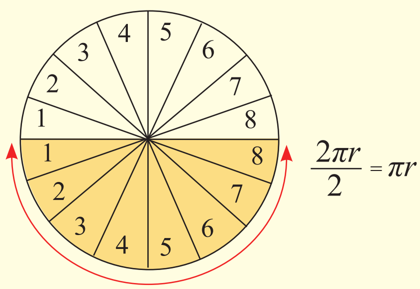
படி 1 : 6 cm ஆரையை உடைய ஒரு வட்டத்தைத் தாள் ஒன்றில் வரைக.

படி 2 : மையத்துக்கூடாக நேர்கோடுகளை வரைவதன் மூலம் வட்டத்தை இயன்ற வரை சிறிய **ஆரைச்சிறைகளாகப்** பிரிக்க (கிட்டத்தட்ட 16 துண்டுகள்).



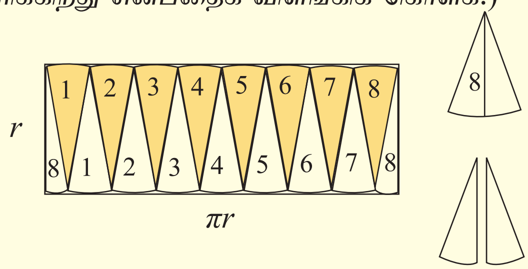
குறிப்பு - ஆரைச்சிறை என்பது 2 ஆரைகளாலும் ஒரு வில்லினாலும் அடைக்கப்பட்ட பிரதேசமாகும்.

படி 3 : வட்டத்தின் அரைவாசியை நிழற்றி உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு எல்லாப் பிரிவுகளையும் முறையே இலக்கமிட்டுக் கொள்க.



படி 4 : கோடுகள் வழியே வெட்டுவதன் மூலம் எல்லா ஆரைச்சிறைகளையும் வேறாக்குக.

படி 5 : வேறாக்கிக் கொண்ட ஆரைச்சிறைகளை உருவில் உள்ளவாறு ஒரு செவ்வக வடிவம் (கிட்டத்தட்ட) பெறப்படுமாறு ஒட்டிக்கொள்க. (ஆரைச் சிறைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது செவ்வகத்தின் பரப்பளவும் அதிகரிக்கிறது என்பதைக் விளங்கிக் கொள்க.)



தாள் வீணாகாத காரணத்தினால் வட்டத்தினதும் செவ்வகத்தினதும் பரப்பளவுகள் சமனாக இருக்க வேண்டும். வட்டத்தின் ஆரையை r எனக் கொண்டு பின்வருமாறு செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக் காணலாம்.

பெறப்படும் செவ்வகத்தின் நீளம் = வட்டத்தின் சுற்றளவு $\times \frac{1}{2}$

$$= 2\pi r \times \frac{1}{2}$$

$$= \pi r$$

பெறப்படும் செவ்வகத்தின் அகலம் $= r$

செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = நீளம் $\times$ அகலம்

$$= \pi r \times r$$

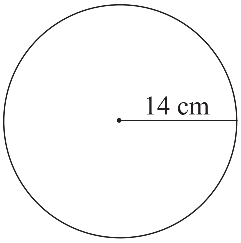
$$= \pi r^2$$

$\therefore$ வட்டம் ஒன்றின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

கணித்தல்களின் வசதிக்காக π இன் பெறுமானம் அண்ணளவாக 3.142 அல்லது $\frac{22}{7}$ எனப் பயன்படுத்தப்படும்.

உதாரணம் 1

14 cm ஆரையை உடைய வட்ட வடிவத்திலான ஓர் அடரின் பரப்பளவைக் காண்க.



ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 44 \times 14$

$= 616 \text{ cm}^2$

$\therefore$ வட்டத்தின் பரப்பளவு 616 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 2

154 cm^2 பரப்பளவை உடைய வட்ட வடிவத்திலான ஓர் அடரின் ஆரையைக் கணிக்க.

வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times r^2$

வட்டத்தின் பரப்பளவு 154 cm^2 எனத் தரப்பட்டுள்ளதால்

$\frac{22}{7} r^2 = 154$

எனவே, $\frac{22}{7} r^2 \times 7 = 154 \times 7$

$\frac{22r^2}{22} = \frac{1078}{22} = 49$

$r^2 = 49$

எனவே $r = 7$ அல்லது $r = -7$ ஆகும்.

ஆயினும் ஆரையானது ஒரு மறைப் பெறுமானமாக இருக்க முடியாது.

$\therefore$ வட்ட வடிவத்திலான அடரின் ஆரை 7 cm ஆகும்.

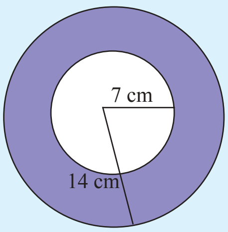
பயிற்சி 23.3

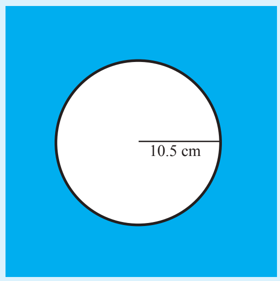
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள அளவீடுகளைக் கொண்ட வட்ட வடிவத்திலான அடர்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க (π இன் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க).
   (i) ஆரை 14 cm (ii) ஆரை 21 cm (iii) விட்டம் 7 cm (iv) விட்டம் 21 cm

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள பரப்பளவுகளை உடைய வட்டங்களின் ஆரைகளைக் கணிக்க.
   (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38 $\frac{1}{2}$ cm^2

3. 196 cm^2 பரப்பளவை உடைய ஒரு சதுரத்திலிருந்து வெட்டியெடுக்கக் கூடிய மிகப் பெரிய வட்டத்தின்,
   (i) ஆரை யாது?
   (ii) பரப்பளவு யாது?

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் உருவிலும் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

   (i)
   

   (ii)
   

5. 70 cm நீளமும் 14 cm அகலமும் உள்ள செவ்வக வடிவத்திலான ஓர் அடரிலிருந்து வெட்டக்கூடிய 7 cm ஆரை உள்ள வட்டங்களின் அதிகூடிய எண்ணிக்கை யாது?

பொழிப்பு

- அடியின் நீளம் a அலகுகளாகவும் உயரம் h அலகுகளாகவும் உள்ள ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு ah சதுர அலகுகள் ஆகும்.
- சமாந்தரப் பக்கங்கள் இரண்டினதும் நீளங்கள் முறையே a, b அலகுகள் ஆகுமாறும் அக்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துயரம் h அலகுகள் ஆகுமாறும் உள்ள ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}(a+b)h$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.
- ஆரை r அலகுகளை உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு πr^2 சதுர அலகுகள் ஆகும்.

24 நிகழ்தகவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளை அறிந்துகொள்ளவதற்கும்
- யாதாயினும் ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளியை எழுதுவதற்கும்
- ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் சமநேர்தகவுள்ள பேறுகளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- சமநேர்தகவுள்ள ஒரு பேற்றின் நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

24.1 எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள்

ஒரு சாதாரண நாணயம் சுண்டப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுவோம். ஒரு நாணயம் சுண்டப்படும்போது ''தலை மேலே இருத்தல்'', ''பூ மேலே இருத்தல்'' என்பன பேறுகளாகும் என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது பரிசோதனை செய்யப்படுவதற்கு முன்னர் எல்லா இயல்தகு பேறுகளையும் நாம் அறிவோம். எனினும் தலை மேலே இருக்கும் அல்லது பூ மேலே இருக்கும் என்று நாம் உறுதியாகக் கூறமுடியாது. மேலும் இப்பரிசோதனையை ஒரே நிலைமைகளின் கீழ் பல தடவை செய்யலாம். பரிசோதனை திரும்பச் செய்யப்படும்போது நாம் பேறுகளில் ஒரு கோலத்தை இனங் காண முடியாமல் இருத்தல் இன்னுமோர் அம்சமாகும். மேற்குறித்த அம்சங்கள் உள்ள பரிசோதனைகள் **எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள்** எனப்படும்.

எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள் பின்வரும் பொதுச் சிறப்பியல்புகளைக் கொண்டுள்ளன.

- பரிசோதனையை ஒரே நிலைமைகளின் கீழ் பல தடவைத் திரும்பச் செய்யலாம்.
- பரிசோதனை நிறைவேற்றப்படு முன்பாக அதன் எல்லா இயல்தகு பேறுகளும் அறியப்பட்டுள்ளன.
- பரிசோதனையை நிறைவேற்று முன்னர் அதன் பேறை உறுதியாகக் கூறமுடியாது.
- பரிசோதனை திரும்பச் செய்யப்படும்போது பேறுகளில் ஒரு கோலத்தைக் காணமுடியாது.

வேறொர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

முகங்கள் 1 தொடக்கம் 6 வரைக்கும் இலக்கமிடப்பட்டுள்ள ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டையை உருட்டி மேலே இருக்கும் முகத்தின் எண்ணைக் குறித்துக் கொள் ளும் பரிசோதனையின் எல்லாப் பேறுகளும் அறியப்பட்டிருந்தாலும் பரிசோதனையை நிறைவேற்றுவதற்கு முன்னர் எந்தப் பேறு நடைபெறுமென உறுதியாகக் கூற முடியாது.

எனினும் இப்பரிசோதனையை அதே நிபந்தனைகளின் கீழ் பல தடவைகள் திரும்பத் திரும்பச் செய்யலாம். ஆனால் பேறுகளில் ஒரு கோலம் இருக்குமென எதிர்பார்க்க முடியாது. ஆகவே ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டையை உருட்டிப் பேறை அவதானித்தல் ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையாகும்.

பயிற்சி 24.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள பரிசோதனைகளைக் கருத்தில் கொண்டு அவை எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள் எனின் எதிரே "✓"அடையாளத்தையும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகள் அல்ல எனின் எதிரே "×" அடையாளத்தையும் இடுக.

பரிசோதனை	எழுமாற்று / எழுமாற்றல்ல
1. முகங்களில் 1 இலிருந்து 4 வரை இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு நான்முகித் தாயக்கட்டையை உருட்டி மேசையைத் தொடும் பக்கத்தில் உள்ள முகத்தைக் குறித்தல்.	
2. ஒரே நிறமுள்ள சர்வசமமான பவளங்களைக் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து ஒரு பவளத்தை வெளியே எடுத்து அதன் நிறத்தைக் குறித்தல்.	
3. குறித்த ஓர் இலக்குக்கு ஒரு பந்தை எறிந்து இலக்கில் படுகிறதா என்பதை அவதானித்தல்.	
4. முள்ளங்கி விதைகள் 5 ஐ நட்டு 5 தினங்களின் பின் அவற்றில் எத்தனை முளைத்துள்ளன என அவதானித்தல்.	
5. மூன்று சாவிகளைக் கொண்ட ஒரு சாவிக் கொத்திலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் ஒரு சாவியினால் ஒரு கதவு திறபடுமா எனப் பார்த்தல்.	
6. பந்து ஒன்றை மேலே எறிந்து அது கீழே விழுகின்றதா என அவதானித்தல்.	
7. 1, 3, 5 என இலக்கமிடப்பட்ட மூன்று சர்வசமனான அட்டைகள் உள்ள பெட்டி ஒன்றிலிருந்து இரண்டு அட்டைகளை வெளியே எடுத்து அவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு ஒற்றையெண்ணாக இருக்கின்றதா என்பதை அவதானித்தல்.	

24.2 **மாதிரி வெளி**

ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையிலிருந்து கிடைக்கத்தக்க எல்லாப் பேறுகளையும் ஒரு தொடையினால் காட்டலாம். அத்தொடையில் ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் பேறுகளாகக் கிடைக்கத்தக்க எல்லாப் பேறுகளும் அடங்கும். அது **மாதிரி வெளி** எனப்படும். மாதிரி வெளி பொதுவாக S இனால் குறிக்கப்படும். அதில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $n\,(S)$ இனால் காட்டப்படும்.

ஓர் உதாரணமாக ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது மேலே இருக்கும் பக்கத்தை அவதானிக்கும் பரிசோதனையில் கிடைக்கத்தக்க எல்லாப் பேறுகளினதும் தொடை அதாவது மாதிரி வெளி

$S = \{$ தலை, பூ$\}$

$n(S) = 2$

எனக் காட்டலாம்.

இவ்வாறே முகங்களில் 1 தொடக்கம் 6 வரைக்கும் இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக் கட்டையை உருட்டும்போது மேலே இருக்கும் பக்கத்தில் உள்ள இலக்கத்தை அவதானிக்கும் பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளி

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$n(S) = 6$

எனக் காட்டலாம்.

உதாரணம் 1

முகங்களில் 1 இலிருந்த 4 வரை இலக்கங்கள் எழுதப்பட்ட ஒழுங்கான நான்முகி வடிவத்திலான ஒரு தாயக்கட்டையை மேலே எறியும்போது மேசையைத் தொடுமாறு விழும் பக்கத்திலுள்ள இலக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளும் பரிசோதனைக்குரிய மாதிரி வெளியை எழுதுக.

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$n(S) = 4$

உதாரணம் 2

முறையே B_1, B_2, W_1, W_2, W_3 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒரே அளவிலான இரண்டு கறுப்பு மாபிள்களும் மூன்று வெள்ளை மாபிள்களும் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு மாபிளை எடுக்கும் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியை எழுதுக. $n(S)$ இன் பெறுமானம் யாது?

$S = \{B_1, B_2, W_1, W_2, W_3\}$

$n(S) = 5$

உதாரணம் 3

ஒரு பக்கம் நீல (B) நிறமும் மற்றைய பக்கம் சிவப்பு (R) நிறமும் குறிக்கப்பட்டுள்ள சீரான அட்டைத் தாள் ஒன்றை இரு தடவைகள் எறியும்போது கிடைக்கும் பேறுகளுக்கான மாதிரி வெளியைத் தருக.

இரு தடவைகளும் நீல நிறம் பெறப்படுதல் (B, B) எனவும் முதலாம் தடவை நீலமும் இரண்டாம் தடவை சிவப்பும் கிடைத்தல் (B, R) என்றவாறும் குறிக்கப்படும்.

இரு தடவைகள் எறியப்படுவதால் கிடைக்கும் பேறுகள்

$S = \{(B, B), (B, R), (R, B), (R, R)\}$

குறிப்பு

மாதிரி வெளியின் தொடைப் பிரிவானது நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

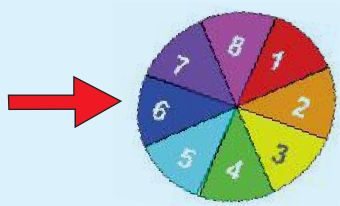
பயிற்சி 24.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வோர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைக்குமுரிய மாதிரி வெளியை எழுதுக.

(i) நீலம், சிவப்பு, கறுப்பு, பச்சை ஆகிய ஒவ்வொரு நிறங்களிலும் ஒரு பேனா வீதம் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு பேனாவைத் தெரிந்தெடுத்து அதன் நிறத்தைக் குறித்தல் (பேனாக்கள் நிறம் தவிர எல்லா அம்சங்களும் சர்வசமமானவை).

(ii) 5 இலிருந்து 15 வரை எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ள சமனான அட்டைகளுள்ள ஒரு பையிலிருந்து ஓர் அட்டையை வெளியே எடுத்து அதன் எண்ணைக் குறித்தல்.

(iii) உருவிலுள்ள தட்டைச் சுழலச் செய்து ஓய்வடையச் செய்யும்போது அம்புக்குறியின் எதிரேயுள்ள எண்ணைக் குறித்தல்.



(iv) ஒரு பையில் ஒரே பருமனும் வடிவமும் உள்ள 4 பாற்சுவையுள்ள இனிப்புகளும் 3 தோடம்பழச் சுவை உள்ள இனிப்புகளும் உள்ளன. எழுமாறாக ஓர் இனிப்பைத் தெரிந்தெடுத்து அதன் சுவையைக் குறித்தல்

(v) ஒரு நாணயக் குற்றி இரண்டு முறை சுண்டப்படும்போது கிடைக்கும் மாதிரி வெளியைத் தருக.

24.3 சம நேர்தகவுள்ள பேறுகள்

ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியைக் கருதும்போது அதன் ஒவ்வொரு பேறும் நேர்வதற்கான ஆற்றல் சமமாக இருந்தால், அப்பரிசோதனை சமமாய் நேரத்தக்க பேறுகள் உள்ள பரிசோதனை எனப்படும். அப்பேறுகள் **சம நேர்தகவுள்ள பேறுகள்** எனப்படும்.

முகங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டையைக் கருதுவோம். அது செய்யப்பட்டுள்ள திரவியம் தாயக்கட்டை எங்கணும் சீராகப் பரவியுள்ளதெனக் கொள்வோம். அப்போது சமச்சீர் காரணமாகத் தாயக்கட்டை உருட்டப்படும்போது அதன் ஒவ்வொரு முகமும் மேலே இருப்பதற்குச் சம

நேர்தகவுள்ளது என்பது தெளிவாகும். ஒரு கோடாத நாணயத்திற்கும் இவ்வாறேயாம். இவற்றைப் போன்ற சமச்சீரானவையும் சீராகப் பரம்பியுள்ள திரவியத்தினாலானவையுமான பொருள்கள் கோடாத பொருள்கள் எனப்படும். ஒரு கோடாத நாணயத்தைச் சுண்டுதல், ஒரு தாயக் கட்டையை உருட்டுதல் போன்ற இத்தகைய பரிசோதனைகள் நிகழ்தகவுக் கொள்கையை விளக்குதலைப் பொறுத்தவரை முக்கியமான உதாரணங்களாகக் கருதப்படுகின்றன.

முகங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டையை உருட்டி மேலே இருக்கும் முகத்தின் இலக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளும் பரிசோதனையைக் கருதுக. இங்கு வெவ்வேறு பக்கங்கள் மேலே இருப்பதற்கான நேர்தகவு சமமாக இல்லாதிருக்கலாம். ஆகவே அத்தகைய ஒரு தாயக்கட்டை கோடாத தாயக்கட்டையாகக் கருதப்படுவதில்லை. அத்தகைய பரிசோதனைகளின் பேறுகள் சமமாக நேராதிருக்கலாம்.

இப்போது வேறொரு பரிசோதனையைக் கருதுவோம்.

நான்கு முகங்களில் சிவப்பு தீந்தையும் இரு முகங்களில் நீலத் தீந்தையும் பூசப்பட்டுள்ள ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை உருட்டப்பட்டு மேலே இருக்கும் முகத்தின் நிறம் குறித்துக் கொள்ளப்படும் பரிசோதனையில் சிவப்பு நிற முகம் மேலே இருப்பதற்கான நேர்தகவு நீல நிற முகம் மேலே இருப்பதற்கான நேர்தகவிலும் கூடியதாகும். இப்பரிசோதனையின் பேறுகள் சமமாய் நேரத்தக்கனவல்ல.

பயிற்சி 24.3

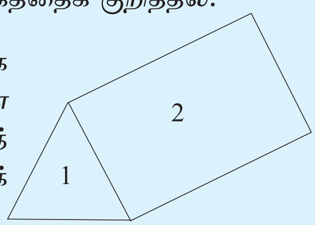
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பரிசோதனைக்கும் உரிய பேறுகள் சமநேர்தகவுள்ளனவா, இல்லையா என்பதைக் காண்க.

(i) ஒரு கோடாத நான்முகியின் முகங்களில் சிவப்பு, நீலம், மஞ்சள், பச்சை ஆகிய நிறங்கள் பூசப்பட்டடுள்ளன. இதனை உருட்டும்போது மேலே இருக்கும் முகத்தின் நிறத்தைக் குறித்தல்.

(ii) ஒரு கோடாத நாணயம் சுண்டப்படும்போது மேலே இருக்கும் பக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளல்.

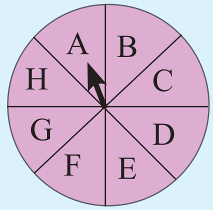
(iii) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4 என இலக்கமிடப்பட்ட 10 அட்டைகளிலிருந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட ஓர் அட்டையின் இலக்கத்தைக் குறித்தல்.

(iv) பக்கங்களில் 1 தொடக்கம் 5 வரை இலக்கமிடப்பட்ட உருவில் காட்டியவாறான முக்கோண அரியத்தை ஒரு தடவை உருட்டும்போது நிலத்தைத் தொடும் பக்கத்தின் இலக்கத்தைக் குறித்துக் கொள்ளல்.

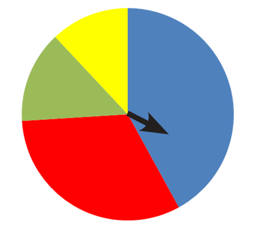


(v) ஒரே அளவிலான 3 சிவப்பு நிற அட்டைகளையும் 4 நீல நிற அட்டைகளையும் கொண்டுள்ள ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட ஓர் அட்டையின் நிறத்தைக் குறித்தல்.

(vi) சமனான ஆரைச்சிறைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ள வட்டவடிவத்திலான ஒரு தட்டின் மையத்தில் பொருத்தப் பட்டுள்ள சுட்டியைச் சுழற்றி ஓய்வடையச் செய்யும்போது அம்புக்குறி ஓய்வு நிலைக்கு வரும் இடத்துக்கேற்ப அட்சரத்தைக் குறித்தல்.



(vii) பகுதிகள் சமனற்றவையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ள வட்ட வட்டவடிவத்திலான ஒரு தட்டின் மையத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ள சுட்டியைச் சுழற்றி ஓய்வடையச் செய்யும்போது சுட்டியானது ஓய்வு நிலைக்கு வரும் இடத்துக்கேற்ப நிறத்தைக் குறித்தல்



24.4 சமநேர்தகவுள்ள ஒரு பேற்றின் நிகழ்தகவு

ஒரு குறித்த எழுமாற்று பரிசோதனையின் ஒவ்வொரு பேறும் சமமாய் நேரும்போதும் தெரிந்தெடுத்த ஒரு பேறின் நிகழ்தகவைப் பின்வருமாறு பெறலாமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

$$\text{தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு பேற்றின் நிகழ்தகவு} = \frac{1}{\text{எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியின் பேறுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

ஒரு கோடாத தாயக் கட்டை உருட்டப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுக. இங்கு ஒரு தெரிந்தெடுத்த எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும். உதாரணமாக 3 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும்.

இப்போது ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியைக் கருதுக. இந்நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தவைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம். மூன்று இரட்டை எண்களும் மூன்று ஒற்றை எண்களும் இருப்பதனால் இந்நிகழ்ச்சியின் பேறுகள் சமமாக நேரத்தக்கனவாகும். ஆகவே ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{6}$ ஆகும்.

ஆகவே சமமாய் நேரத்தக்க பேறுகள் உள்ள ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியில் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$\text{நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு} = \frac{\text{நிகழ்ச்சியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரி வெளியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}$$

குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.
மாதிரி வெளி S இலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $n\ (S)$ ஆகவும் நிகழ்ச்சி A இல் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $n\ (A)$ ஆகவும் நிகழ்ச்சி நடைபெறும் நிகழ்தகவு $p\ (A)$ ஆகவும் இருப்பின்,

$$p\ (A) = \frac{n\ (A)}{n\ (S)}$$

இப்போது சில உதாரணங்களைக் கருதுவதன் மூலம் மேலும் விடயங்களைக் கற்போம்.

உதாரணம் 1

கோடாத ஒரு நாணயத்தை ஒரு தடவை சுண்டும்போது மேல்நோக்கி இருக்கும் பக்கத்தை அவதானிக்கும் ஒரு பரிசோதனையில்,
(i) மாதிரி வெளியை எழுதி $n\ (S)$ ஐக் காண்க.
(ii) தலை பெறப்படுவதற்கான பேறு A ஆயின் A இன் மூலகங்களை எழுதி $n\ (A)$ ஐக் காண்க.
(iii) தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $p\ (A)$ ஐக் காண்க.

(i) $S = \{$தலை, பூ$\}$
$n\ (S) = 2$

(ii) $A = \{$தலை$\}$
$n\ (A) = 1$

(iii) $p\ (A) = \frac{n\ (A)}{n\ (S)}$
$p\ (A) = \frac{1}{2}$

உதாரணம் 2

1, 2, 3, 4 என முகங்களில் இலக்கமிடப்பட்டுள்ள கோடாத ஒரு நான்முகித் தாயக்கட்டையை மேலே எறிந்து மேசையைத் தொடும் முகத்தின் இலக்கத்தைக் குறிக்கும் ஒரு பரிசோதனையில் பெறப்படும் எண்

(i) 2 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
(ii) ஓர் இரட்டை எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
(iii) 1 இலும் பெரிய ஓர் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

இங்கு மாதிரி வெளி $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ஆகையால் $n\ (S) = 4$ ஆகும்.
(i) பேறு 2 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$.

(ii) ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை B எனக் கொண்டால்
$B = \{2, 4\}$ ஆகையால் $n(B) = 2$ ஆகும்.
$\therefore p(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

(iii) 1இலும் கூடிய 3 எண்கள் உள்ளன $\{2, 3, 4\}$.
$\therefore$ 1இலும் கூடிய ஓர் எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{3}{4}$

பயிற்சி 24.4

1. முகங்களில் 1 இலிருந்து 6 வரைக்கும் இலக்கமிடப்பட்ட ஒரு தாயக்கட்டையை உருட்டும்போது மேல் நோக்கி இருக்கும் பக்கத்தின் எண்ணைக் குறிக்கும் ஒரு பரிசோதனையில்
   (i) பெறக்கூடிய எல்லா இயல்தகவுப் பேறுகளையும் உள்ளடக்கிய மாதிரி வெளியை (S) எழுதுக.
   (ii) $n(S)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (iii) ஓர் இரட்டை எண் விழும் நிகழ்ச்சியை A எனக் கொண்டால் A இன் எல்லா மூலகங்களையும் எழுதி $n(A)$ ஐக் காண்க.
   (iv) A நடைபெறுவதற்கான $P(A)$ ஐக் காண்க.
   (v) முதன்மை எண்ணாகும் ஓர் எண் விழுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

2. A, B, C, D, E, F, G, H என எழுதப்பட்டுள்ள 8 சர்வசமனான அட்டைகளைக் கொண்ட ஒரு பையிலிருந்து எழுமாறாக ஓர் அட்டையை எடுக்கும் ஒரு பரிசோதனையின்
   (i) மாதிரி வெளியை எழுதுக.
   (ii) எழுத்து B ஐக் கொண்ட அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iii) ஓர் உயிரெழுத்து எழுதப்பட்ட ஓர் அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iv) எழுத்து K எழுதப்பட்ட அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

3. 1 இலிருந்து 25 வரை எண்கள் இடப்பட்ட சர்வசமனான 25 அட்டைகள் ஒரு பெட்டியில் உள்ளன. அதிலிருந்து எழுமாற்றாக ஓர் எண் எடுக்கப்படும் பரிசோதனைக்கு ஏற்ப,
   (i) எண் 8 ஐக் கொண்ட அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (ii) 5 இன் மடங்காகும் ஓர் எண்ணைக் கொண்ட ஓர் அட்டை பெறப் படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iii) ஒற்றை எண்ணாகவுள்ள ஓர் எண்ணைக் கொண்ட ஓர் அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iv) சதுர எண்ணாகவுள்ள ஓர் எண்ணைக் கொண்ட ஓர் அட்டை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

4. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள உபகரணத்தின் காட்டியைச் (அம்புக்குறியைச்) சுழலச் செய்து ஓய்வடையச் செய்யும் போது அம்புக்குறியின் அமைவுக்கேற்பப் பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க.

   (i) கடும் நீல நிறமுள்ள கட்டத்தினுள்ளே சுட்டி ஓய்வடைதல்
   (ii) சிவப்பு நிறமுள்ள கட்டத்தினுள்ளே சுட்டி ஓய்வடைதல்
   (iii) செம்மஞ்சள் நிறமுள்ள கட்டத்தினுள்ளே சுட்டி ஓய்வடைதல்.

5. ஒரு பல்தெரிவு வினாத்தாளில் ஒரு வினாவிற்குத் தரப்பட்டுள்ள 5 விடைகளில் ஒரு விடை மாத்திரம் சரியானதாகும். விடை தெரியாத ஒரு வினாவுக்கு ஒரு மாணவன் எழுமாற்றாக ஒரு விடையைத் தெரிந்தெடுத்தான். அவனது விடை
   (i) சரியானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (ii) பிழையானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

6. ஒரே அளவான மாபிள்களைக் கொண்ட பை ஒன்றில் 3 சிவப்பு நிற மாபிள்களும் 2 கறுப்பு நிற மாபிள்களும் 5 வெள்ளை நிற மாபிள்களும் உள்ளன.
   (i) சிவப்பு நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (ii) நீல நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iii) சிவப்பு அல்லது வெள்ளை நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iv) கறுப்பு நிற மாபிள் ஒன்று கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. எழுமாறாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மாணவன் ஒரு வாரத்தில் எத்தினத்தில் பிறந்துள்ளான் என்பதை ஆராயும் ஒரு பரிசோதனையைக் கருதுக.
   (i) மாணவன் திங்கட்கிழமை பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (ii) மாணவன் ஞாயிற்றுக்கிழமை பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iii) மாணவன் புதன் அல்லது வெள்ளிக்கிழமை பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
   (iv) மாணவன் சனி, ஞாயிறு அல்லாத ஒரு தினத்தில் பிறந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

பொழிப்பு

சமநேர்தகவுடைய பேறுகள் உள்ள எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றில்

- குறித்த ஒரு பேறு கிடைப்பதற்கான

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{1}{\text{எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி வெளியில் உள்ள பேறுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

- ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $= \frac{\text{நிகழ்ச்சியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மாதிரிவெளியில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை}}$

- $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

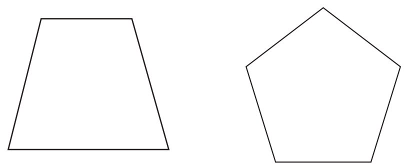
25 பல்கோணியின் கோணங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

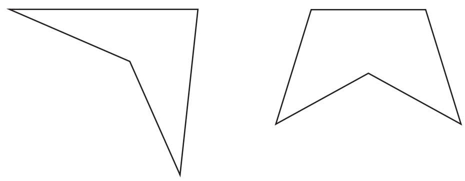
- பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்கள் தொடர்பான கேத்திரகணிதப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் தொடர்பான கேத்திரகணிதப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்
- ஒழுங்கான பல்கோணிகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேர் கோட்டுத் துண்டங்களால் அடைக்கப்பட்ட தளவுரு **பல்கோணி** என அழைக்கப்படும். குவிவுப் பல்கோணிகள், குழிவுப் (விரி) பல்கோணிகள் என இரு வகைப் பல்கோணிகள் உள்ளன.

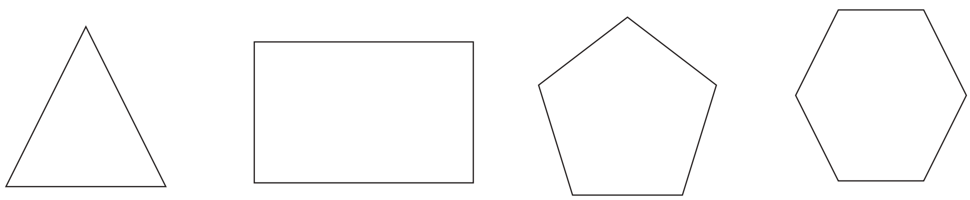


குவிவுப் பல்கோணிகள்



குழிவுப் பல்கோணிகள்

அவற்றில் சில பல்கோணிகள் பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப விசேட பெயர்களால் அழைக்கப்படும். 3 பக்கங்களை, 4 பக்கங்களை, 5 பக்கங்களை, 6 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணிகள் முறையே முக்கோணி, நாற்பக்கல், ஐங்கோணி, அறுகோணி என அழைக்கப்படும்.



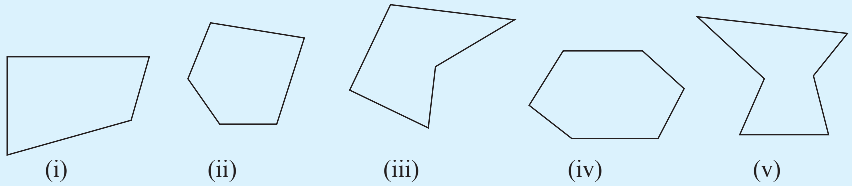
நீங்கள் முன்னைய வகுப்புக்களில் முக்கோணி ஒன்றின் மற்றும் நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை பற்றிய பின்வரும் பேறுகளைக் கற்றுள்ளீர்கள்.

முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} ஆகும்.
நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360^{o} ஆகும்.

நீங்கள் பல்கோணிகள் தொடர்பாகக் கற்றுள்ள மேற்குறிப்பிட்ட விடயங்களை மேலும் உறுதிசெய்து கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

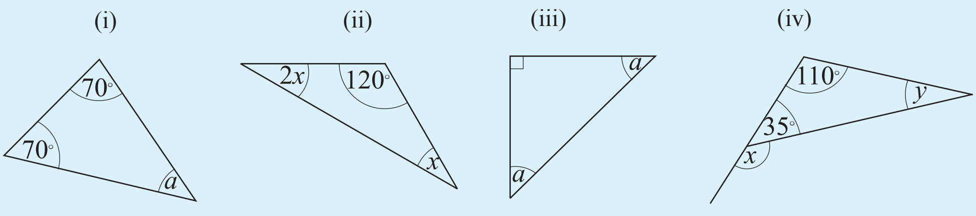
மீட்டற் பயிற்சி

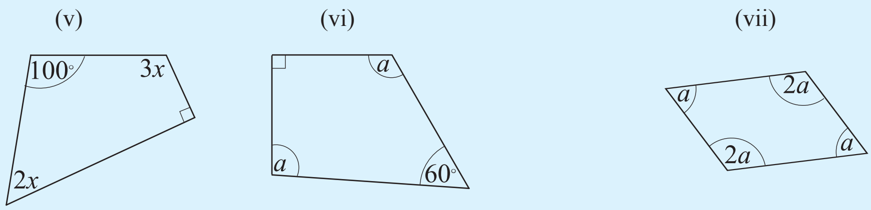
1. தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் குவிவுப் பல்கோணிகளைத் தெரிவுசெய்க.



2. பின்வரும் கூற்றுகளில் சரியானவற்றைத் தெரிவுசெய்க.
   (a) 7 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி எழுகோணி எனப்படும். ( )
   (b) எந்தவொரு பல்கோணியினதும் அகக்கோணங்களின் எண்ணிக்கை அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமனாகும். ( )
   (c) எல்லாப் பக்கங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமமான பல்கோணி ஒழுங்கான பல்கோணி எனப்படும். ( )
   (d) பல்கோணி ஒன்றின் ஓர் உச்சியில் உள்ள அகக்கோணத்தினதும் புறக் கோணத்தினதும் கூட்டுத்தொகை 180^o ஆகும். ( )
   (e) ஒரு தசகோணியில் 11 அகக்கோணங்கள் உள்ளன. ( )
   (f) நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^o ஆகும். ( )

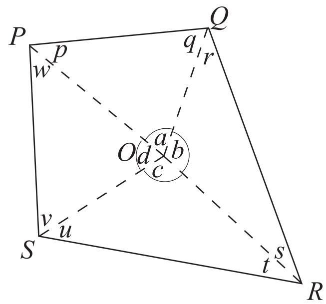
3. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் அட்சரகணித உறுப்புக்களால் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.





25.1 பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை

நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணும் ஒரு முறையை முதலில் பார்ப்போம்.



உருவில் தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் $PQRS$ இனுள்ளே O என்பது யாதேனுமொரு புள்ளியாகும். PO, QO, RO, SO என்பவற்றை இணைப்பதன் மூலம் 4 முக்கோணிகள் பெறப்பட்டுள்ளன.

முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^o ஆகையால்,

முக்கோணி PQO ஐக் கருதும்போது $p + q + a = 180^o$

முக்கோணி QRO ஐக் கருதும்போது $r + s + b = 180^o$

முக்கோணி RSO ஐக் கருதும்போது $t + u + c = 180^o$

முக்கோணி SPO ஐக் கருதும்போது $v + w + d = 180^o$

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளையும் கூட்டுவதால்

$$(p + q + a) + (r + s + b) + (t + u + c) + (v + w + d) = 180^o \times 4$$

$$\therefore\ (p + q + r + s + t + u + v + w) + (a + b + c + d) = 720^o$$

a, b, c, d என்பன புள்ளி O ஐச் சுற்றியுள்ள கோணங்கள் ஆகையால்,

$a + b + c + d = 360^o$ ஆகும்.

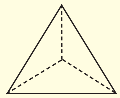
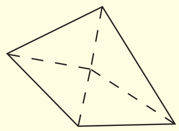
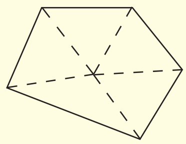
$$\therefore\ (p + q + r + s + t + u + v + w) = 720 - 360^o$$
$$= 360^o$$

$\therefore$ நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360^o ஆகும்.

இப்போது நாம் n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்காக n இல் கோவை ஒன்றைப் பெறுவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்வோம்.

செயற்பாடு 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையைப் பிரதிசெய்து பூரணப்படுத்துக.

பல்கோணி	உரு	முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை	அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை
முக்கோணி		3	$180^{o} \times 3 - 360^{o} = 180^{o}$
நாற்பக்கல்		4	$180^{o} \times 4 - 360^{o} = 360^{o}$
ஐங்கோணி		5	$180^{o} \times ... - 360^{o} = 540^{o}$
அறுகோணி	....	....	....
எழுகோணி	....	....	....
எண்கோணி	....	....	....
n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி	....	....	....

மேற்படி செயற்பாட்டிற்கு ஏற்ப, n எண்ணிக்கையான பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^{o} \times n - 360^{o}$ என்ற கோவையைப் பெற்றிருப்பீர்கள்.

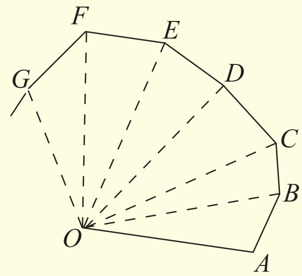
$180^{o} \times n - 360^{o}$ என்ற கோவையை நினைவில் வைத்திருப்பதற்காகப் பின்வருமாறு அதனை ஒழுங்கமைப்போம்.

$$180^{o} \times n - 360^{o} = 90^{o} \times 2n - 90^{o} \times 4$$
$$= 90^{o}(2n - 4)$$
$$= (2n - 4) \text{ செங்கோணங்கள்}$$

n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை = $(2n - 4)$ செங்கோணங்கள்.

செயற்பாடு 2

பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான சூத்திரம் ஒன்றைப் பெற்றுக் கொள்ளக் கூடிய இன்னுமொரு முறை கீழே தரப்பட்டுள்ள இப்பிரசினத்தில் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) தரப்பட்டுள்ள வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

பல்கோணி	பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	பல்கோணியின் பெயர்	முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை	அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை
OAB	3	முக்கோணி	1	$180^{o} \times 1 = 180^{o}$
$OABC$	4	நாற்பக்கல்	2	$180^{o} \times$ .... = ...
$OABCD$	....	....	....	....
$OABCDE$	....	....	....	....
$OABCDEF$	....	....	....	....
$OABCDEFG$	....	....	....	....

(ii) இவ்வட்டவணைக்கு ஏற்ப n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் ஓர் உச்சியை ஏனைய உச்சிகளுடன் தொடுப்பதால் பெறப்படும் முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கையை n என எழுதுக.

(iii) n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $180^{o}(n-2)$ எனக் காட்டுக.

குறிப்பு

வரலாற்றுரீதியில் பார்க்கும்போது கிரேக்க நாட்டுக் கணிதவியலாளரான யூக்கிலிட்டு என்பவர் கோணங்களைச் செங்கோணங்களில் எடுத்துரைத்தார். உதாரணமாக நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள கோணங்கள் 2 செங்கோணங்கள் எனவும் ஒரு நாற்பக்கலின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 4 செங்கோணங்கள் எனவும் காணப்பட்டது. இதற்கேற்ப, n பக்கங்களை உடைய பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $2n-4$ செங்கோணங்கள் என நாம் கூறலாம். செங்கோணத்தை 90^{o} எனக் கூறலாம். ஆகவே பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையை $90^{o}(2n-4)$ அல்லது $180^{o}(n-2)$ அல்லது இலகுவாக ஞாபகம் வைக்கக்கூடிய அதற்குச் சமமான வேறு ஒரு முறையில் கூறலாம்.

உதாரணம் 1

நவகோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் அகக்கோணங்களின்

கூட்டுத்தொகை $= 180^o (n-2)$

$\therefore$ 9 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் அகக்கோணங்களின்

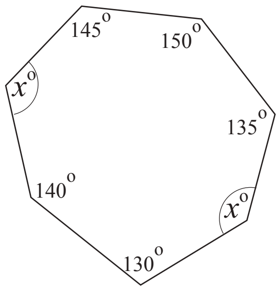
கூட்டுத்தொகை $= 180^o (9-2)$

$= 180^o \times 7$

$= 1260^o$

உதாரணம் 2

உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு ஏற்ப x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை = 7

$\therefore$ அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^o\ (7-2)$

$= 180^o \times 5$

$= 900^o$

$\therefore 145^o + 150^o + 135^o + x^o + 130^o + 140^o + x^o = 900^o$

$700^o + 2x = 900^o$

$2x = 900^o - 700^o$

$2x = 200^o$

$x = \frac{200^o}{2} = 100^o$

உதாரணம் 3

பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 1440^o ஆகும். அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

பக்கங்களின் எண்ணிக்கை n எனின்,

அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^o (n-2)$

$\therefore\ 180^o (n-2) = 1440^o$

$n - 2 = \frac{1440^o}{180} = 8$

$n - 2 = 8$

$n = 10$

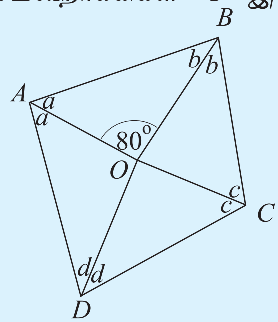
$\therefore$ பக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= 10$

![icon] **பயிற்சி 25.1**

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பல்கோணியிலும் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.
   (i) ஐங்கோணி (ii) எண்கோணி
   (iii) பன்னிருகோணி (iv) 15 பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி

2. எழுகோணி ஒன்றின் நான்கு அகக்கோணங்கள் 100^{o}, 112^{o}, 130^{o}, 150^{o} ஆகும். அதன் ஏனைய மூன்று கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆகும். ஒரு கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. $ABCD$ என்ற நாற்பக்கலின் அகக்கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் O இல் சந்திக்கின்றன.

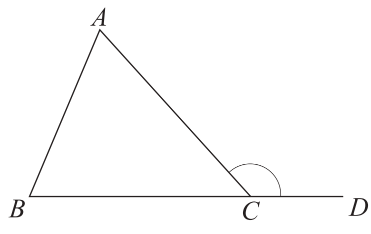


   (i) $a + b + c + d$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (ii) $a + b$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (iii) $c + d$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
   (iv) $C\hat{O}D$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. (i) அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 1620^{o} ஆகவுள்ள பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (ii) அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 3600^{o} ஆகவுள்ள பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

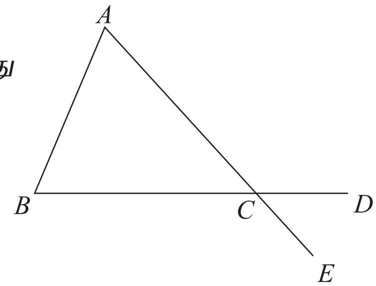
25.2 பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை

முதலில் முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்போம்.



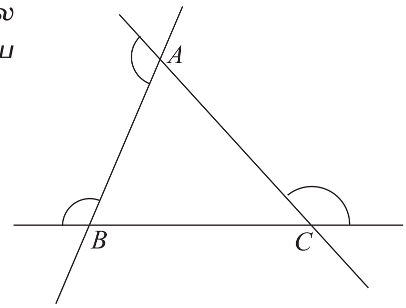
முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC ஐ நீட்டுவதால் உண்டாகும் கோட்டில் D என்னும் புள்ளி குறிக்கப்பட்டுள்ளது. CD என்ற கோட்டுத் துண்டத்திற்கும் பக்கம் AC இற்கும் இடையில் உள்ள கோணம் $A\hat{C}D$ ஆனது உச்சி C இலுள்ள ஒரு புறக்கோணம் ஆகும்.

தரப்பட்டுள்ள உருவில் காட்டியவாறு பக்கம் AC ஐ நீட்டுவதாலும் புறக்கோணம் ஒன்று உருவாகும். அது $B\hat{C}E$ ஆகும்.

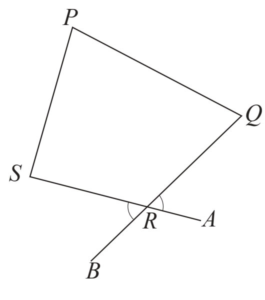


குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமனாகும். ஆகையால் இப்புறக்கோணத்தின் பருமனும் புறக்கோணம் $A\hat{C}D$ இன் பருமனுக்குச் சமனாகும். ஆகவே இவற்றில் எந்தக் கோணத்தையும் உச்சி C இல் வரைந்த புறக்கோணமாகக் கருதலாம். ஆனால் $D\hat{C}E$ ஐப் புறக்கோணமாகக் கருத முடியாது.

முக்கோணியின் A, B ஆகிய உச்சிகளிலும் மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளவாறு புறக்கோணங்களை வரைய முடியும்.



மேலே குறிப்பிட்டவாறு, நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்களையும் வரையறுக்க முடியும்.



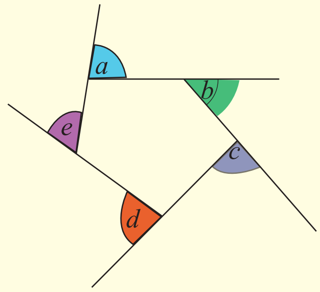
நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் பக்கம் SR ஐ A வரை நீட்டுவதால் $Q\hat{R}A$ என்ற புறக்கோணமும் பக்கம் QR ஐ நீட்டுவதால் $S\hat{R}B$ என்ற புறக்கோணமும் பெறப்படும். குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம் ஆகையால் புறக்கோணங்களும் சமம் ஆகும்.
மேலும் $A\hat{R}B$ ஐ ஒரு புறக்கோணமாகக் கருதுவதில்லை.

இவ்வாறு எந்தவொரு பல்கோணிக்கும் புறக்கோணங்களை வரையறுக்கலாம்.

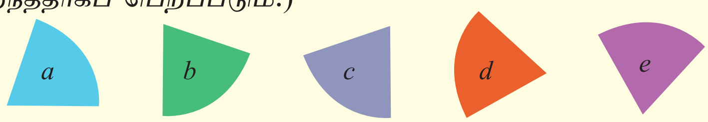
இப்போது நாம் பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

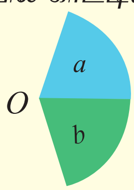
படி 1 : ஒரு தாளில் ஐங்கோணி ஒன்றை வரைந்து அதன் புறக்கோணங்களை a, b, c, d, e எனக் குறித்து நிழற்றுக.



படி 2 : நிழற்றிய (புறக்கோணங்களை ஆரைச்சிறை வடிவத்தில்) வெட்டி வேறாக்குக. (வரையும்போது ஒரே ஆரையில் இவற்றை வரைந்தால் முடிவு சிறந்ததாகப் பெறப்படும்.)



படி 3 : வேறாக்கிய ஆரைச்சிறைகளின் உச்சிகள் ஒரே புள்ளியில் அதாவது O இல் பொருந்துமாறு அடுத்தடுத்து வருமாறு ஒன்றன்மீது ஒன்று படியாதவாறு உருவில் காட்டியவாறு ஒட்டுக.



படி 4 : அறுகோணி ஒன்றுக்கும் எழுகோணி ஒன்றிற்கும் மேற்குறிப்பிட்ட படிமுறையைச் செய்க.

படி 5: இவற்றின் புறக்கோணங்களையும் மேற்குறிப்பிட்டவாறு ஒட்டுவதன் மூலம் பெறப்படும் பேறுகளின் பொது இயல்பையும் அதிலிருந்து பெறக்கூடிய முடிவினையும் எழுதுக.

மேலேயுள்ள செயற்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும் புறக்கோணங்கள் எல்லாம் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி அமையும் என்பதை அவதானிக்க முடியும். இதிலிருந்து பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையானது ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும் என்ற முடிபுக்கு வரலாம். ஒரு

புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகையால் மேலே எடுத்த பல்கோணியின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையும் 360° ஆகும்.

இப்போது நாம் n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியின் புறக்கோணங்களில் கூட்டுத்தொகைக்கான ஒரு கோவையை இன்னொரு முறையில் பெறுவோம்.

n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணியில் n அகக்கோணங்களும் n புறக்கோணங்களும் உள்ளன என்பதை அறிவோம்.

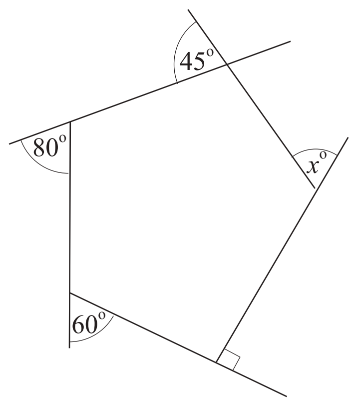
பல்கோணியின் எந்தவொரு உச்சியிலும்
அகக்கோணத்தின் பெறுமானம் + புறக்கோணத்தின் பெறுமானம் $= 180^{\circ}$
$\therefore$ n அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை + n புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^{\circ} \times n$ ஆகும்.
ஆனால் n அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= (2n - 4)$ செங்கோணங்கள் ஆகையால்
$180^{\circ}(n-2)$ + n புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^{\circ}n$

$\therefore$ n புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 180^{\circ}n - 180^{\circ}(n-2)$
$= 180^{\circ}n - 180^{\circ}n + 360^{\circ}$
$= 360^{\circ}$

n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள ஐங்கோணியில் x° எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள புறக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.



புறக்கோணத்தின் கூட்டுத்தொகை $= 360^{\circ}$

$\therefore\ x + 45^{\circ} + 80^{\circ} + 60^{\circ} + 90^{\circ} = 360^{\circ}$

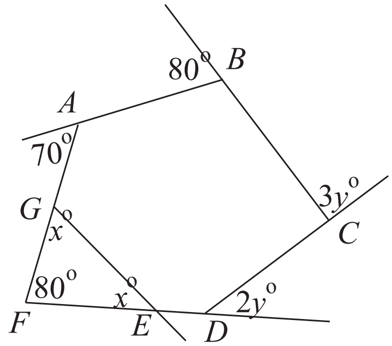
$x + 275^{\circ} = 360^{\circ}$

$x = 360^{\circ} - 275^{\circ}$

$x = 85^{\circ}$

உதாரணம் 2

உருவில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப
(i) x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(ii) y இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(i) முக்கோணி EFG இன் அகக்கோணங்களின்

கூட்டுத்தொகை $= 180^\circ$

$$\therefore\ 80^\circ + x + x = 180^\circ$$
$$2x = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$
$$x = \frac{100^\circ}{2}$$
$$x = 50^\circ$$

(ii) அறுகோணி $ABCDEG$ இன் புறக்கோணங்களின்

கூட்டுத்தொகை $= 360^\circ$

$$\therefore\ 70^\circ + 80^\circ + 3y + 2y + x + x = 360^\circ$$
$$70^\circ + 80^\circ + 5y + 50^\circ + 50^\circ = 360^\circ$$
$$5y = 360^\circ - 250^\circ$$
$$5y = \frac{110^\circ}{5}$$
$$y = 22^\circ$$

உதாரணம் 3

நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் 2 : 2 : 3 : 3 என்ற விகிதத்தில் அமைந்துள்ளன. ஒவ்வொரு புறக்கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.

புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 360^\circ$

4 புறக்கோணங்களினதும் விகிதம் $= 2 : 2 : 3 : 3$

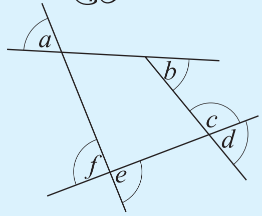
$\therefore$ சிறிய கோணம் $= 360^\circ \times \frac{2}{10} = 72^\circ$

பெரிய கோணம் $= 360^\circ \times \frac{3}{10} = 108^\circ$

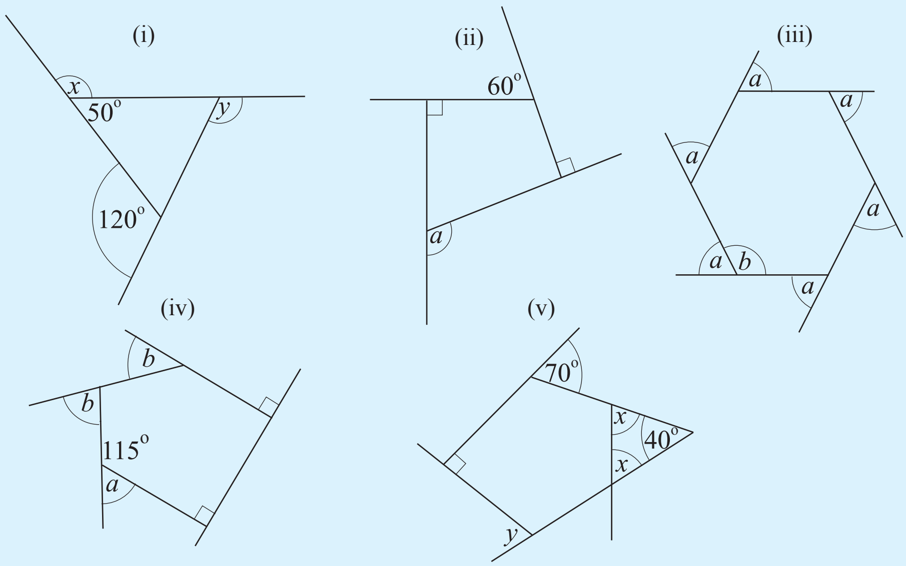
$\therefore$ புறக்கோணங்கள் $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$ ஆகும்.

பயிற்சி 25.2

1. உருவில் a, b, c, d, e, f என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் கோணங்களில் நாற்பக்கலின் புறக்கோணங்கள் எவை என எழுதுக.



2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பல்கோணியிலும் ஆங்கில எழுத்தினால்/ எழுத்துக்களினால் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



3. நாற்பக்கல் ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் x°, $2x^{\circ}$, $3x^{\circ}$, $4x^{\circ}$ எனக் குறிப்பிடப் பட்டுள்ளன.

(i) ஒவ்வொரு புறக்கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.

(ii) ஒவ்வொரு அகக்கோணத்தினதும் பருமனைக் காண்க.

4. ஐங்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்கள் $1 : 1 : 2 : 3 : 3$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அதில் ஒவ்வொரு புறக்கோணத்தினதும் பருமனையும் காண்க.

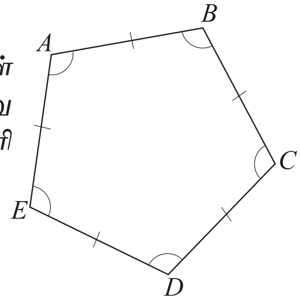
5. பன்னிருகோணியின் புறக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆகும். அதன் ஒரு புறக்கோணத்தின் பருமனைக் காண்க.

6. புறக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமான பல்கோணி ஒன்றின் ஒரு புறக் கோணம் 18° ஆகும். அப்பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

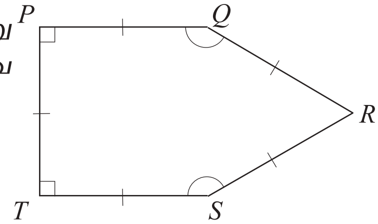
25.3 ஒழுங்கான பல்கோணிகள்

பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் அகக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் உள்ளபோது அப்பல்கோணி **ஒழுங்கான பல்கோணி** எனப்படும்.

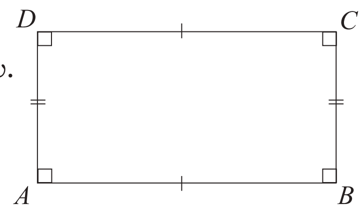
உருவில் தரப்பட்டுள்ள ஐங்கோணி $ABCDE$ இல் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் உள்ளன. எனவே அது ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஆகும்.



ஐங்கோணி $PQRST$ இல் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம். கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமல்ல. எனவே $PQRST$ ஒழுங்கான ஐங்கோணியன்று.



செவ்வகம் ஒன்றின் கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆனால் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமல்ல. எனவே செவ்வகம் ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியன்று.



சில ஒழுங்கான பல்கோணிகளுக்கு விசேட பெயர்கள் உள்ளன. ஒழுங்கான முக்கோணி **சமபக்க முக்கோணி** எனப்படும். ஒழுங்கான நாற்பக்கல் **சதுரம்** எனப்படும்.

உதாரணம் 1

ஒழுங்கான அறுகோணி ஒன்றின் ஒரு புறக்கோணத்தைக் கண்டு, அதிலிருந்து ஒரு அகக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6 புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 360^\circ$

$\therefore$ ஒரு புறக்கோணத்தின் பெறுமானம் $= \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

புறக்கோணம் + அகக்கோணம் $= 180^\circ$

60° + அகக்கோணம் $= 180^\circ$

$\therefore$ அகக்கோணம் $= 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$

உதாரணம் 2

ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணம் ஒன்றின் பெறுமானம் 150° ஆகும். அதன்

(i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க.

(ii) பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் + அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் $= 180^{\circ}$

$\therefore$ புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் $+ 150^{\circ} = 180^{\circ}$

$\therefore$ புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் $= 180^{\circ} - 150^{\circ}$

$= 30^{\circ}$

(ii) $\therefore$ பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{360^{\circ}}{30^{\circ}} = 12$

பயிற்சி 25.3

1. ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க. அதிலிருந்து அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்போம்.

2. 15 பக்கங்களை உடைய ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க. அதிலிருந்து அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமனைக் காண்க.

3. (i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் 120° ஆகவுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை யாது? அதன் விசேட பெயரை எழுதுக.
   (ii) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் 90° ஆகவுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணியின் விசேட பெயரைக் காரணங்களுடன் எழுதுக.
   (iii) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன் 40° ஆகவுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் விசேட பெயரை எழுதுக.

4. புறக்கோணத்தைப் போன்று 4 மடங்கு பருமனுள்ள அகக்கோணத்தைக் கொண்டிருக்கும் ஒழுங்கான பல்கோணியின்
   (i) புறக்கோணம் ஒன்றின் பருமன்
   (ii) அகக்கோணம் ஒன்றின் பருமன்
   (iii) பக்கங்களின் எண்ணிக்கை
   என்பவற்றைக் காண்க.

5. ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் எடுக்கக்கூடிய மிகக் கூடிய பெறுமானம் யாது? அச்சந்தர்ப்பத்தில் அப்பல்கோணி எப்பெயர் கொண்டு அழைக்கப்படும்?

பொழிப்பு

- n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் அகங்கோணங்ளின் கூட்டுத்தொகை $(2n - 4)$ செங்கோணங்கள் அல்லது $(n - 2)\ 180^{\circ}$ இனால் தரப்படும்.
- n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.
- பல்கோணி ஒன்றின் பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனாகவும் அகக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் காணப்படும்போது அது ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணி எனப்படும்.

26 அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்
- அட்சரகணிதப் பின்னங்களை அறிந்துகொள்ளவும்
- அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டவும் கழிக்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

எண் சார்ந்த பின்னங்களைக் கூட்டவும் கழிக்கவும் அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்கவும் அவற்றின் அடைப்புக்குறிகளை நீக்கவும் காரணிகளை வேறாக்கவும் நீங்கள் முன்னர் கற்றுள்ளீர்கள். நீங்கள் முன்னர் கற்றவற்றை மீட்பதற்குப் பின்வரும் மீட்டல் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சுருக்குக.

(i) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{12}{13}-\frac{2}{13}-\frac{1}{13}$ (iv) $\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$

2. வெற்றுக் கட்டத்துக்குப் பொருத்தமான எண்ணை எழுதுக.

(i) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$=\frac{1\times\square}{2\times 2}-\frac{1}{4}$

$=\frac{\square\ -1}{4}$

$=\frac{\square}{4}$

(ii) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

$=\frac{3\times\square}{4\times 3}-\frac{\square\times 4}{3\times 4}$

$=\frac{\square-\square}{12}$

$=\frac{\square}{12}$

(iii) $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}-\frac{1}{3}$

$=\frac{4\times\square}{5\times 6}-\frac{3\times\square}{10\times 3}-\frac{1\times 10}{3\times\square}$

$=\frac{\square-\square-10}{30}$

$=\frac{\square}{30}$

$=\frac{\square\ \div 5}{30\div 5}$

$=\frac{\square}{6}$

3. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்குக.

(i) $2x+3x$ (ii) $3y-y$ (iii) $5a+4a+a$
(iv) $5x+3y+x+3y$ (v) $3y+2-y-2$ (vi) $4n-1+5-2n$
(vii) $-3y+2-y-3+2y$ (viii) $5xy-6xy+3x+y$

4. விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

(i) $2(x+y)+3x$ (ii) $3(2x-4y)+12y$

(iii) $-(4-3x)-1$ (iv) $2(3x-2)+3(x+2)$

(v) $3(m+1)-2(2m-1)$ (vi) $x(x-y)+2xy$

5. பின்வரும் ஒவ்வொரு கூற்றும் சரியாயின் "✓" எனவும் தவறாயின் "×" எனவும் எதிரே குறிக்க.

(i) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ இன் விடை $\frac{2+1}{3+4}$ என்னும் சுருக்கலுக்குச் சமனானது.

(ii) இரு பின்னங்களின் கூட்டலை அல்லது கழித்தலைச் செய்வதற்கு அவற்றின் தொகுதியெண்கள் சமனாக இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லாவிடின், அவற்றைச் சமப்படுத்திக்கொள்ள வேண்டும்.

(iii) இரு அலகுப் பின்னங்களைக் கூட்டிப் பெறப்படும் பின்னத்தின் தொகுதியெண் அவ்விரு பின்னங்களின் பகுதியெண்களின் கூட்டுத் தொகையாக இருப்பதுடன் பகுதியெண் அவற்றின் பெருக்கமாகும்.

(iv) சமனற்ற பகுதியெண்களைக் கொண்ட பின்னங்கள் இரண்டைக் கூட்டுவதற்கு அல்லது கழிப்பதற்கு, அமைத்துக் கொள்ள வேண்டிய பகுதியெண் முதற் பகுதியெண்கள் இரண்டினதும் பொ. ம. சி. ஆக இருக்க வேண்டும்.

(v) பின்னங்கள் இரண்டின் பகுதியெண்ணையும் தொகுதியெண்ணையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கி அப்பின்னத்தை எளிய சமவலுப் பின்னமாக மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

(vi) பின்னம் ஒன்றின் பகுதியெண்ணையும் தொகுதியெண்ணையும் ஒரே எண்ணால் வகுத்து அப்பின்னத்தை எளிய சமவலுப் பின்னமாக மாற்றலாம்.

(vii) $-3x-2x$ என்பதை $(-3x)+(-2x)$ என எழுதலாம்.

(viii) $-3(2x-5)$ என்பதன் அடைப்புக் குறிகளை நீக்குவதற்கு $2x$ ஐயும் -5 ஐயும் 3 ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

(ix) $-x-x$ என்பதைச் சுருக்கினால் $2x$ கிடைக்கும்.

(x) $3x+4y$ என்பதைச் சுருக்கும்போது $7xy$ எனப் பெறப்படும்.

26.1 அட்சரகணிதப் பின்னங்கள்

பின்னம் ஒன்றின் தொகுதியில் அல்லது பகுதியில் அல்லது இரண்டிலும் அட்சரத்தை அல்லது அட்சரகணிதக் கோவையைக் கொண்டுள்ள ஒரு பின்னம் அட்சரகணிதப் பின்னம் எனப்படும்.

- தொகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணித உறுப்பை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

  $\frac{x}{2}, \frac{3x}{5}, \frac{7y}{20}, \frac{6mn}{3}, \frac{2t^2}{5}$

- தொகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணிதக் கோவையை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

  $\frac{x+1}{5}, \frac{2x-1}{3}, \frac{x+y}{2}, \frac{m-n}{7}, \frac{3m-2n-1}{10}$

- பகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணித உறுப்பை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

  $\frac{3}{x}, \frac{2}{3m}, \frac{5}{2y}, \frac{4}{3xy}, \frac{5}{m^2}$

- பகுதியில் மாத்திரம் அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்றைக் கொண்ட 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

  $\frac{3}{2x+1}, \frac{2}{a+b}, \frac{5}{2m-n}, \frac{4}{3x-2y}, \frac{1}{3x\ cy+2}$

- பகுதியிலும் தொகுதியிலும் அட்சரகணித உறுப்புகளை உடைய 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

  $\frac{a}{c}, \frac{2a}{d}, \frac{2m}{3n}, \frac{4x^2}{5y^2}, \frac{2xy}{3pq}$

- பகுதியில் அட்சரகணித உறுப்பையும் தொகுதியில் அட்சரகணிதக் கோவையையும் கொண்ட 5 பின்னங்களை எழுதுக.

  $\frac{x+1}{2x}, \frac{2a+b}{c}, \frac{3a+d}{4a}, \frac{2x-1}{c}, \frac{4x^2y-a^2}{b}$

- பகுதியில் அட்சரகணிதக் கோவையையும் தொகுதியில் அட்சரகணித உறுப்பையும் கொண்ட 5 அட்சரகணிதப் பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{x}{2x+5}, \frac{a}{5b+d}, \frac{3c}{a+b}, \frac{4xy}{5x-3}, \frac{a^2}{a-b}$$

- பகுதி, தொகுதி ஆகிய இரண்டிலும் அட்சரகணிதக் கோவைகளை உடைய 5 பின்னங்களை எழுதுக.

$$\frac{x+1}{2x-1}, \frac{x+y}{3x+2y}, \frac{3x-4}{x+1}, \frac{4m-3n}{5m+2n}, \frac{4x-y}{2x+3y-4}$$

26.1 பகுதியில் நிறைவெண்களை உடைய அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

பகுதியும் தொகுதியும் நிறைவெண்களை உடைய பின்னங்களைக் கூட்டியும் கழித்தும் உள்ள விதத்திலேயே அட்சரகணிதப் பின்னங்களையும் கூட்டவும் கழிக்கவும் முடியும்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{5x}{9} + \frac{2x}{9}$

$\frac{5x}{9} + \frac{2x}{9} = \frac{5x+2x}{9}$ (இரு பின்னங்களிலும் பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)

$= \frac{7x}{9}$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{5y}{7} - \frac{3y}{7}$

$\frac{5y}{7} - \frac{3y}{7} = \frac{5y-3y}{7}$ (பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)

$= \frac{2y}{7}$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\frac{4x}{15} + \frac{7x}{15} - \frac{2x}{15}$

$$\frac{4x}{15} + \frac{7x}{15} - \frac{2x}{15} = \frac{11x - 2x}{15}$$ (பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)

$$= \frac{9x}{15}$$ (9, 15 ஆகிய எண்களின் பொ. கா.பெ. ஐ 3 ஆல் வகுத்தல்)

$$= \frac{3x}{5}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{5}$

$$\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{5} = \frac{x+1+x+2}{5}$$ (இரு பின்னங்களினதும் பகுதிகள் சமம் ஆகையால்)

$$= \frac{x+x+1+2}{5}$$

$$= \frac{2x+3}{5}$$

உதாரணம் 5

சுருக்குக. $\frac{2b+3}{7} - \frac{b+2}{7}$

$$\frac{2b+3}{7} - \frac{b+2}{7} = \frac{2b+3-(b+2)}{7}$$ (கழிக்கப்படும் அட்சரகணிதக் கோவையை அடைப்புக் குறிக்குள் எழுத வேண்டும்.)

$$= \frac{2b+3-b-2}{7}$$

$$= \frac{2b-b+3-2}{7}$$

$$= \frac{b+1}{7}$$

உதாரணம் 6

சுருக்குக. $\frac{7c+1}{8} - \frac{2c+1}{8} - \frac{c-2}{8}$

$$\frac{7c+1}{8} - \frac{2c+1}{8} - \frac{c-2}{8} = \frac{7c+1-(2c+1)-(c-2)}{8}$$

$$= \frac{7c+1-2c-1-\mathrm{c}+2}{8}$$

$$= \frac{4c+2}{8}$$

$$= \frac{2(2c+1)}{8}$$

$$= \frac{2c+1}{4}$$

பயிற்சி 26.1

1. சுருக்கி எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{a}{5} + \frac{a}{5}$ (ii) $\frac{3d}{15} + \frac{2d}{15}$ (iii) $\frac{2t}{3} - \frac{t}{3}$

(iv) $\frac{7k}{8} - \frac{3k}{8}$ (v) $\frac{3k}{7} + \frac{2k}{7} + \frac{k}{7}$ (vi) $\frac{5h}{9} - \frac{2h}{9} - \frac{h}{9}$

(vii) $\frac{7v}{10} - \frac{3v}{10} + \frac{v}{10}$ (viii) $\frac{x}{8} - \frac{3x}{8}$ (ix) $\frac{p}{9} - \frac{4q}{9} - \frac{5p}{9}$

2. சுருக்கி எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{3y+1}{5} + \frac{2y+2}{5}$ (ii) $\frac{4m-1}{7} + \frac{3m-2}{7}$ (iii) $\frac{5n+3}{8} + \frac{2n-1}{8}$

(iv) $\frac{5c-2}{10} + \frac{3c+4}{10}$ (v) $\frac{6d+1}{10} - \frac{2d-3}{10}$

(vi) $\frac{3x+1}{6} - \frac{2x-3}{6} + \frac{x+4}{6}$

26.2 சமனற்ற நிறைவெண் பகுதியைக் கொண்ட அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

$\frac{x}{6} + \frac{3x}{4}$ போன்ற சமனற்ற நிறைவெண் பகுதியைக் கொண்ட அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சுருக்கும் விதத்தை நோக்குவோம். இவ்வாறான அட்சரகணிதப் பின்னங்களைச் சாதாரண ரீதியிலான பின்னங்களைப் போலவே சுருக்க வேண்டும். தரப்பட்ட பின்னங்களின் பகுதியெண்களின் பொது மடங்கு ஒன்றைப் பொதுப் பகுதியாகக் கொள்ள வேண்டும். இருப்பினும் பொது மடங்குகளில் சிறியதைப் பொதுப் பகுதியெண்ணாகக் கொண்டால் சுருக்கல் இலகுவாகும்.

உதாரணமாக, மேற்குறித்த இரு பின்னங்களிலும் பகுதிகளின் 6 உம் 4 உம் உள்ளன. அவற்றின் பொது மடங்குகளில் சிறியது 12 ஆகும். எனவே ஒவ்வொரு பின்னத்தினதும் பகுதி 12 ஆகுமாறு உள்ள சமவலுப் பின்னத்தைப் பெறவேண்டும் $\frac{x}{6}$ இல் பகுதி 12 ஐப் பெறுவதற்காகப் பகுதியெண்ணை 2 ஆல் பெருக்க வேண்டும் ($\frac{12}{6}$ ஆகையால் 2 பெறப்படுகிறது). அதே விதமாக $\frac{3x}{4}$ இல் பகுதி 12 ஐப் பெறுவதற்காகப் பகுதியெண்ணை 3 ஆல் பெருக்க வேண்டும் ($\frac{12}{4}$ ஆகையால் 3 பெறப்படுகிறது). ஆகவே தரப்பட்ட இரு பின்னங்களையும் சுருக்குவதற்காகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

இப்பின்னங்களின் பகுதியையும் தொகுதியையும் சுருக்கும்போது

$\frac{x}{6} + \frac{3x}{4} = \frac{2}{2} \times \frac{x}{6} + \frac{3}{3} \times \frac{3x}{4}$ எனப் பெறப்படும்.

இரு பின்னங்களிலும் ஒரே பகுதியெண் இருப்பதால், இவ்வாறு எழுதலாம்.

$\frac{2x}{12} + \frac{9x}{12}$

ஆகவே $\frac{x}{6} + \frac{3x}{4} = \frac{11x}{12}$ ஆகும்.

இதனை மேலும் சில உதாரணங்களின் மூலம் காண்க.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{2y}{5} + \frac{y}{4}$

$$\frac{2y}{5} + \frac{y}{4} = \frac{4 \times 2y}{4 \times 5} + \frac{5 \times y}{5 \times 4}$$

(5, 4 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 20 ஆகையால் பொதுப் பகுதியெண் 20 ஆகுமாறு சமவலுப் பின்னங்களைப் பெற்றுக் கொள்ளல்)

$$= \frac{8y}{20} + \frac{5y}{20}$$

$$= \frac{13y}{20}$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{2t}{3} - \frac{t}{2}$

$$\frac{2t}{3} - \frac{t}{2} = \frac{2 \times 2t}{2 \times 3} - \frac{3 \times t}{3 \times 2}$$

(3, 2 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 6 ஆயையால் பொதுப் பகுதியெண் 6 ஆகுமாறு சமவலுப் பின்னங்களைப் பெற்றுக்கொள்ளுதல்)

$$= \frac{4t}{6} - \frac{3t}{6}$$

$$= \frac{4t - 3t}{6}$$

$$= \frac{t}{6}$$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\frac{3v}{2} - \frac{4v}{5} + \frac{3v}{4}$

$$\frac{3v}{2} - \frac{4v}{5} + \frac{3v}{4} = \frac{10 \times 3v}{10 \times 2} - \frac{4 \times 4v}{4 \times 5} + \frac{5 \times 3v}{5 \times 4}$$

(2, 5, 4, ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 20 ஆகையால் பகுதியெண் 20 ஆகும்மாறு சமவலுப் பின்னங்களைப் பெற்றுக் கொள்ளல்)

$$= \frac{30v}{20} - \frac{16v}{20} + \frac{15v}{20}$$

$$= \frac{29v}{20}$$

பகுதிகள் சமனற்றுக் காணப்படும் வேளைகளில் பகுதிகளின் பொ.ம.சி. பொதுப் பகுதியெண் ஆகுமாறு பின்னங்களை மாற்றியமைத்துச் சுருக்குவது இலகு வாகிவிடும் என்பது உதாரணங்களின் மூலம் தெளிவாகிறது. அட்சரகணிதக் கோவை ஒன்று எண் ஒன்றினால் பெருக்கப்படும் சந்தர்ப்பத்தை நோக்குவோம். இங்கே அட்சரகணிதக் கோவைகளை அடைப்புக் குறிக்குள் எழுதுவது முக்கியமானது.

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\frac{x + 1}{2} + \frac{2x + 1}{3}$ (2, 3 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 6 ஆகும்)

$$\frac{x + 1}{2} + \frac{2x + 1}{3} = \frac{3\ (x + 1)}{3 \times 2} + \frac{2\ (2x + 1)}{2 \times 3}$$

(அட்சரகணிதக் கோவையை அடைப்புக்குள் எழுதுதல்)

$$= \frac{3x + 3}{6} + \frac{4x + 2}{6}$$

(அடைப்பு நீக்குதல்)

$$= \frac{3x + 3 + 4x + 2}{6}$$

$$= \frac{7x + 5}{6}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\dfrac{5y-1}{6} - \dfrac{3y-2}{4}$

$\dfrac{5y-1}{6} - \dfrac{3y-2}{4} = \dfrac{2\,(5y-1)}{2\times 6} - \dfrac{3\,(3y-2)}{3\times 4}$ (4, 6 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 12 ஆகும்)

$= \dfrac{2\,(5y-1)}{12} - \dfrac{3\,(3y-2)}{12}$ (2 இனாலும் – 3 இனாலும் பெருக்கி அடைப்புகளை நீக்குதல்)

$= \dfrac{2\,(5y-1)-3\,(3y-2)}{12}$

$= \dfrac{10y-9y-\ 2+\ 6}{12}$

$= \dfrac{y+4}{12}$

உதாரணம் 6

சுருக்குக. $\dfrac{3m+2n}{5} - \dfrac{2m-n}{10} - \dfrac{3m-2n}{15}$

$\dfrac{3m+2n}{5} - \dfrac{2m-n}{10} - \dfrac{3m-2n}{15}$ (5,10, 15 ஆகிய எண்களின் பொ.ம.சி. 30 ஆகும்)

$= \dfrac{6\,(3m+2n)}{6\times 5} - \dfrac{3\,(2m-n)}{3\times 10} - \dfrac{2\,(3m-2n)}{2\times 15}$

$= \dfrac{6\,(3m+2n)}{30} - \dfrac{3\,(2m-n)}{30} - \dfrac{2\,(3m-2n)}{30}$

$= \dfrac{6m+19n}{30}$

பயிற்சி 26.2

1. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{6}$ (ii) $\dfrac{b}{4} + \dfrac{b}{12}$ (iii) $\dfrac{5x}{3} - \dfrac{3x}{5}$

(iv) $\dfrac{3y}{4} - \dfrac{5y}{16}$ (v) $\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{3}$ (vi) $\dfrac{c}{3} - \dfrac{c}{4}$

(vii) $\dfrac{3d}{10} + \dfrac{2d}{15}$ (viii) $\dfrac{5m}{6} - \dfrac{3m}{10}$ (ix) $\dfrac{3n}{7} + \dfrac{n}{5}$

2. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}$ (ii) $\frac{c}{5} + \frac{3c}{16} + \frac{2c}{15}$

(iii) $\frac{3x}{5} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{15}$ (iv) $\frac{3n}{4} - \frac{3n}{8} - \frac{n}{2}$

3. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{2a}{5} + \frac{3a-2}{6}$ (ii) $\frac{2b-1}{8} + \frac{3b}{12}$

(iii) $\frac{3c+2}{6} + \frac{2c-1}{9}$ (iv) $\frac{5t-3}{10} - \frac{3t}{15}$

(v) $\frac{2m-n}{12} - \frac{3m+n}{9}$ (vi) $\frac{3y+1}{10} + \frac{2y-1}{5} + \frac{4-y}{20}$

(vii) $\frac{3x-y}{4} + \frac{2x+y}{6} - \frac{5x-2y}{3}$ (viii) $\frac{3y+2}{3} - \frac{y-1}{4} - \frac{2y-3}{8}$

26.3 பகுதியில் சமனான அட்சரகணித உறுப்புள்ள அட்சரகணிதப் பின்னங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

இவ்வாறான அட்சரகணிதப் பின்னங்களுக்கு உதாரணமாக $\frac{2}{5x} + \frac{1}{5x}$ ஐக் கூட்டலாம். இப்பின்னங்களின் பகுதிகள் அட்சரகணித உறுப்புகளாயினும் அவை சமன் ஆகையால் சாதாரணமான பின்னங்களைச் சுருக்கும் விதத்திலேயே சுருக்கலாம். அதற்கேற்ப

$$\frac{2}{5x} + \frac{1}{5x} = \frac{2+1}{5x}$$
$$= \frac{3}{5x}$$

எனச் சுருக்கலாம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{4}{7m} + \frac{2}{7m}$

$$\frac{4}{7m} + \frac{2}{7m} = \frac{4+2}{7m}$$
$$= \frac{6}{7m}$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{5}{6n} - \frac{1}{6n}$

$$\frac{5}{6n} - \frac{1}{6n} = \frac{5-1}{6n}$$
$$= \frac{4}{6n}$$ (பொதுக் காரணியான 2 ஆல் வகுத்தால் எளிய பின்னமாகும்)
$$= \frac{2}{3n}$$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\frac{3a}{4b} + \frac{1}{4b} - \frac{a}{4b}$

$$\frac{3a}{4b} + \frac{1}{4b} - \frac{a}{4b} = \frac{3a + 1 - a}{4b} \quad \text{(பொதுப் பகுதி } 4b \text{ ஆகும்.)}$$

$$= \frac{2a + 1}{4b}$$

உதாரணம் 4

சுருக்குக. $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+1}$

இவற்றின் பகுதிகளில் அட்சரகணிதக் கோவைகள் இருப்பினும் அவை சமன் ஆகையால் மேற்குறிப்பிட்டவாறே சுருக்கலைச் செய்யலாம்.

$$\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+1} = \frac{3+2}{x+1}$$

$$= \frac{5}{x+1}$$

உதாரணம் 5

சுருக்குக. $\frac{7}{x-3} - \frac{4}{x-3}$

$$\frac{7}{x-3} - \frac{4}{x-3} = \frac{7-4}{x-3} \quad \text{(பொதுப் பகுதி } x - 3 \text{ ஆகும்.)}$$

$$= \frac{3}{x-3}$$

பயிற்சி 26.3

1. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{5}{a} + \frac{2}{a}$ (ii) $\frac{8}{x} + \frac{2}{x}$ (iii) $\frac{3}{y} - \frac{1}{y}$

(iv) $\frac{4}{3y} - \frac{2}{3y}$ (v) $\frac{3}{5t} + \frac{2}{5t}$ (vi) $\frac{h}{2k} + \frac{5h}{2k}$

(vii) $\frac{7}{2n} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n}$ (viii) $\frac{8}{3v} - \frac{4}{3v} - \frac{1}{3v}$ (ix) $\frac{5}{m} + \frac{2}{m} + \frac{1}{m}$

(x) $\frac{8}{7xy} - \frac{8}{7xy} + \frac{8}{7xy}$

2. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\frac{5}{m+3} + \frac{2}{m+3}$ (ii) $\frac{8}{n+5} + \frac{3}{n+5}$ (iii) $\frac{4}{a+b} + \frac{6}{a+b}$

26.4 தொகுதி, பகுதி ஆகிய இரண்டும் அட்சரகணிதக் கோவைகளைக் கொண்ட பின்னங்களைச் சுருக்குதல்

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $\frac{5x}{2x+1} + \frac{3x}{2x+1}$

$\frac{5x}{2x+1} + \frac{3x}{2x+1} = \frac{5x+3x}{2x+1}$ (பொதுப் பகுதி $2x+1$ ஆகும்.)

$= \frac{8x}{2x+1}$

உதாரணம் 2

சுருக்குக. $\frac{7y}{3y-1} + \frac{2y}{3y-1}$

$\frac{7y}{3y-1} + \frac{2y}{3y-1} = \frac{7y-2y}{3y-1}$ (பொதுப் பகுதி $3y-1$ ஆகும்.)

$= \frac{5y}{3y-1}$

உதாரணம் 3

சுருக்குக. $\frac{2x-1}{5x+1} + \frac{3x+2}{5x+1}$

$\frac{2x-1}{5x+1} + \frac{3x+2}{5x+1} = \frac{2x-1+3x+2}{5x+1}$ (பொதுப் பகுதி $5x+1$ ஆகும்.)

$= \frac{2x+3x-1+2}{5x+1}$

$= \frac{5x+1}{5x+1}$

$= 1$

உதாரணம் 4

$\dfrac{9m-1}{5m-1}+\dfrac{3m}{5m-1}-\dfrac{2m+1}{5m-1}$ சுருக்குக.

$\dfrac{9m-1}{5m-1}+\dfrac{3m}{5m-1}-\dfrac{2m+1}{5m-1} = \dfrac{9m-1+3m-(2m+1)}{5m-1}$ (கழிக்கப்படும் அட்சர கணிதக் கோவைகளை அடைப்புக் குறிக்குள் எழுத வேண்டும்)

$= \dfrac{9m-1+3m-2m-1}{5m-1}$ (– 1 இனால் பெருக்கி அடைப்பு நீக்குதல்)

$= \dfrac{9m+3m-2m-1-1}{5m-1}$

$= \dfrac{10m-2}{5m-1}$

$= \dfrac{2\cancel{(5m-1)}}{\cancel{(5m-1)}}$ (தொகுதியில் பொதுக் காரணியை வேறாக்கி எளிய வடிவத்தில் எழுதுதல்)

$= 2$

பயிற்சி 26.4

1. சுருக்கி விடையை எளிய வடிவத்தில் தருக.

(i) $\dfrac{k}{3k-1}+\dfrac{2}{3k-1}$

(ii) $\dfrac{2h}{5h-2}-\dfrac{h}{5h-2}$

(iii) $\dfrac{3t}{3t-1}-\dfrac{1}{3t-1}$

(iv) $\dfrac{2k+1}{5k+1}-\dfrac{k-2}{5k+1}$

(v) $\dfrac{2y}{3y+2}-\dfrac{y}{3y+2}+\dfrac{1}{3y+2}$

(vi) $\dfrac{2a+1}{5a-2}-\dfrac{3a}{5a-2}-\dfrac{3}{5a-2}$

(vii) $\dfrac{8m+10}{2m+3}-\dfrac{4m+1}{2m+3}+\dfrac{2m}{2m+3}$

(viii) $\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m-n}{m+n}$

27 அளவிடைப் படங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

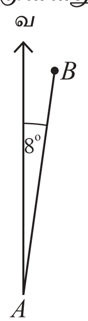
- திசைகோளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- கிடைத் தளத்தின் மீதுள்ள அமைவிடங்களின் திசைகோள், தூரம் என்பன தரப்படுமிடத்து உரிய அளவிடைப் படத்தை வரைந்து தெரியாத கணியங்களைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

27.1 திசைகோள்

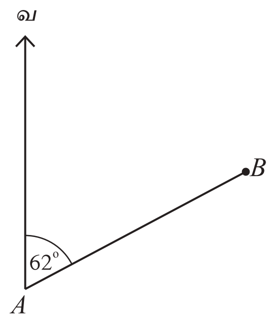
திசைகோள் என்பது கிடைத் தளத்தில் பொருள் ஒன்றின் அமைவைக் காட்டுவதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் மற்றுமொரு அளவீடாகும். புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B இன் திசைகோள் என்பது புள்ளி A இலிருந்து முதலில் வடக்கு திசையை நோக்கிய பின் புள்ளி B ஐ நோக்குவதற்காக வலஞ்சுழியாகத் திரும்பும் கோணம் ஆகும். பின்வரும் உருக்களில் ஒரு புள்ளி குறித்து மற்றுமொரு புள்ளியின் திசைகோள் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(i)



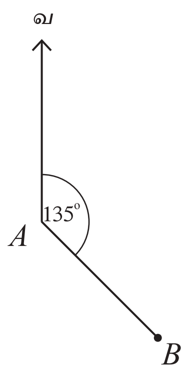
A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 008°

(ii)



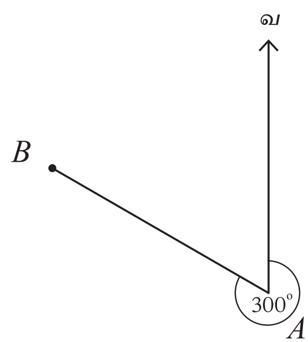
A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 062°

(iii)



A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 135°

(iv)



A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 300°

திசைகோள் 360^{o} இலும் குறைந்த பெறுமானம் ஆகையால் பயன்படுத்தப்படும் எண் குறிகளின் உயர்ந்தபட்ச எண்ணிக்கை மூன்று ஆகும். எனவே திசைகோள் மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதப்படுவது வழக்கம். வடக்குடன் வலஞ்சுழியாக ஆக்கும் சுழற்சிக் கோணம் 1^{o}, 2^{o}, ..., 9^{o} என்பன திசைகோளாக முறையே 001^{o}, 002^{o}, ..., 009^{o} எனவும் 10^{o}, 11^{o}, ..., 99^{o} என்பன முறையே 010^{o}, 011^{o}, ..., 099^{o} எனவும் எழுதப்படும்.

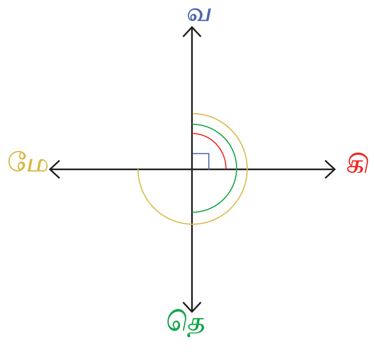
எனவே திசைகோள்
(i) வடக்குத் திசையை அடிப்படையாகக் கொண்டு அளக்கப்படும்.
(ii) அளக்கும் போக்கு வடக்குடன் வலஞ்சுழியாக அமையும்.
(iii) திசைகோள் மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டு எழுதப்படும்.

திசையறிகருவி ஒன்றின் மூலம் வடக்குத் திசையை இலகுவாக அறிந்துகொள்ள முடியும் ஆகையால் கப்பல் மற்றும் ஆகாயவிமானப் பயணங்களின்போது இவ்வளவீடு பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களின் மூலம் திசைகோள் பற்றிய அறிவை விருத்திசெய்து கொள்ளலாம்.

உதாரணம் 1

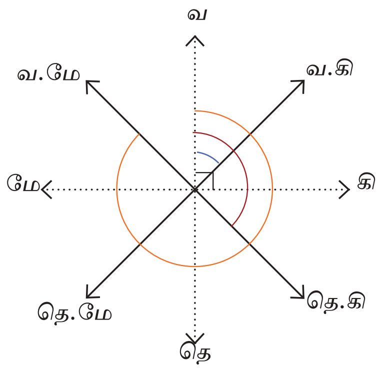
(i) நான்கு பிரதான திசைகளைத் திசைகோளில் தருக.
(ii) நான்கு உப திசைகளைத் திசைகோளில் தருக.

(i)



திசை	திசைகோள்
வடக்கு	000^{o}
கிழக்கு	090^{o}
தெற்கு	180^{o}
மேற்கு	270^{o}

(ii)

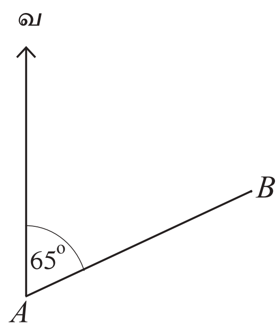


திசை	திசைகோள்
வட கிழக்கு	045°
தென் கிழக்கு	135°
தென் மேற்கு	225°
வட மேற்கு	315°

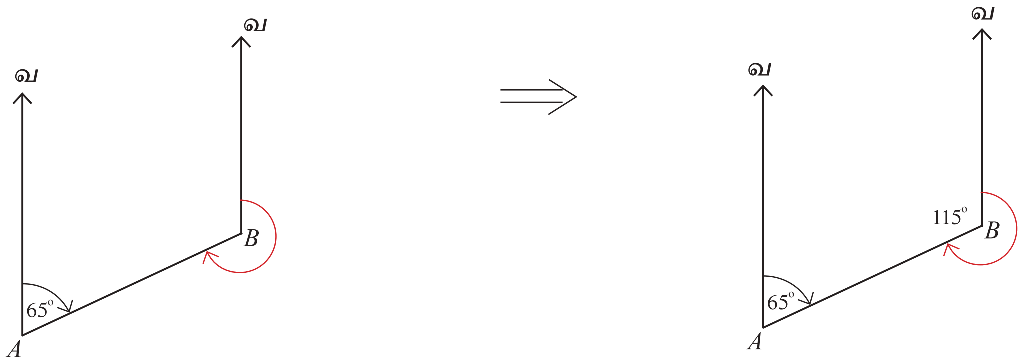
உதாரணம் 2

A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 065° ஆகும். இத்தகவலைப் பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டி, B இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்க.

A இலிருந்து B இன் திசைகோள் 065° ஆகையால் A இல் வரையப்பட்ட வடக்குத் திசையுடன் AB என்ற திசைவரை வலஞ்சுழியாக 65° கோணத்தை ஆக்குகின்றது.



B இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்பதற்கு B இல் வரையப்பட்ட வடக்குத் திசையுடன் BA என்ற திசைவரை வலஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணத்தைக் காண வேண்டும்.



A இலும் B இலும் வடக்கைக் காட்டும் கோடுகள் சமாந்தரமானவை. அக்கோடுகள் இரண்டும் AB என்னும் குறுக்கோடியினால் வெட்டப்பட்டு ஏற்படும் நேயக் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகளாகும். அதன் மூலம் 115° என்னும் பெறுமானம் பெறப்பட்டுள்ளது.

ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகையால்

B இலிருந்து A இன் திசைகோள் $= 360^{\circ} - 115^{\circ}$

$= 245^{\circ}$

பயிற்சி 27.1

1. பாகைமானியைப் பயன்படுத்திக் கோணங்களை வரைவதன் மூலம் பின்வரும் ஒவ்வொரு திசைகோளையும் வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டுக.

(i) E இலிருந்து F இன் திசைகோள் 005°

(ii) P இலிருந்து Q இன் திசைகோள் 075°

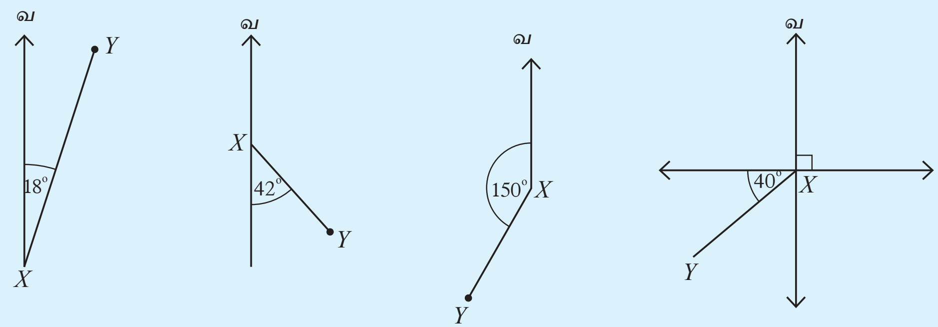
(iii) M இலிருந்து N இன் திசைகோள் 105°

(iv) J இலிருந்து H இன் திசைகோள் 270°

(v) C இலிருந்து D இன் திசைகோள் 310°

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் X இலிருந்து Y இன் திசைகோளைக் காண்க.

(i) (ii) (iii) (iv)



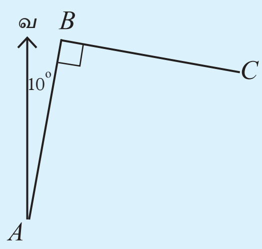
3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப

(i) A இலிருந்து B இன் திசைகோள்

(ii) B இலிருந்து A இன் திசைகோள்

(iii) C இலிருந்து B இன் திசைகோள்

என்பவற்றைக் காண்க.



4. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஆகும். A இற்கு வடக்கே B அமைந்துள்ளது.

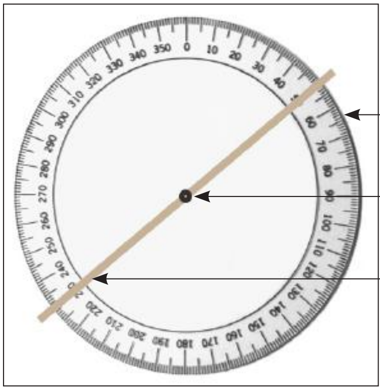
(i) இத்தகவல்களைப் பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டுக.
(ii) அதிலிருந்து பின்வரும் திசைகோள்களைக் காண்க.

(a) A இலிருந்து B இன் திசைகோள் (b) A இலிருந்து C இன் திசைகோள்
(c) B இலிருந்து C இன் திசைகோள் (d) C இலிருந்து B இன் திசைகோள்
(e) C இலிருந்து A இன் திசைகோள் (f) B இலிருந்து A இன் திசைகோள்

27.2 கோணமானி

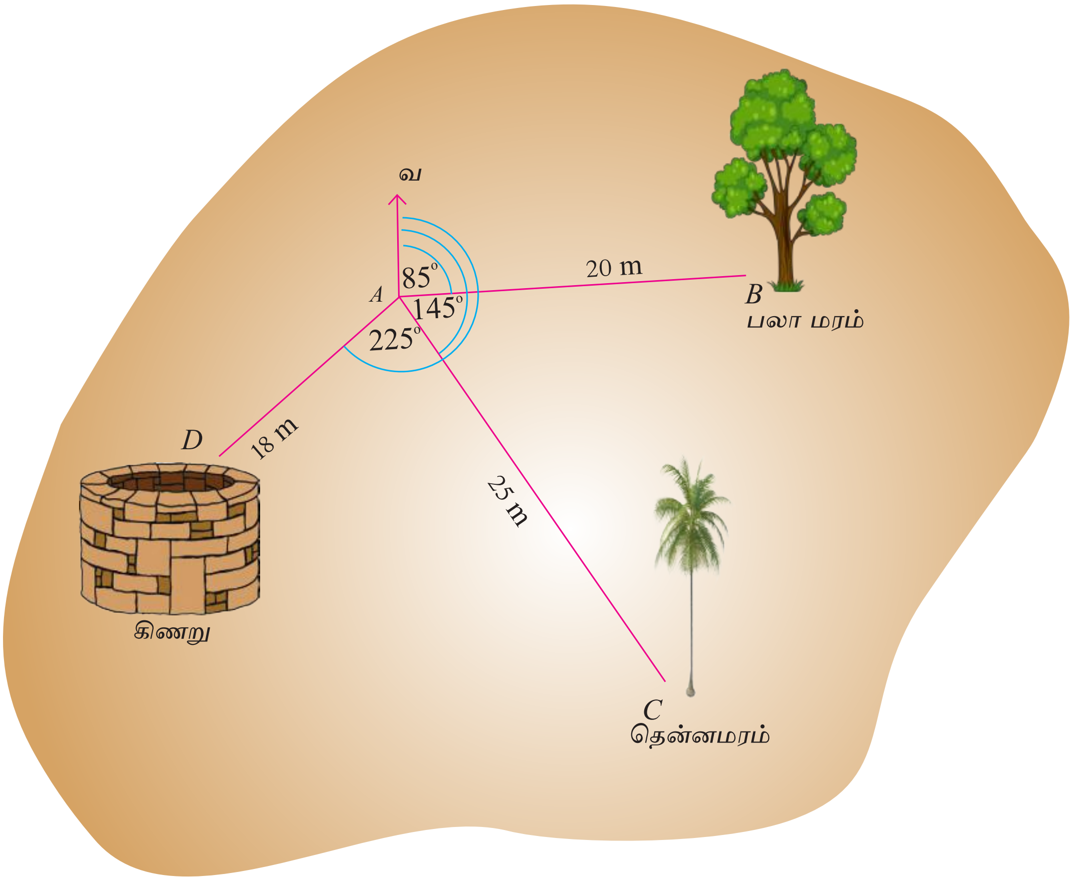
திசைகோள், தூரம் என்பவற்றின் மூலம் தளம் ஒன்றின் மீதுள்ள அமைவிடங்களை விவரிக்க முடியும். இதற்காகத் திசைகோளைக் காண்பதற்கு ஒரு கோணமானியைப் பயன்படுத்தலாம்.

கோணமானி



- அளவீடுகளை எழுத வேண்டிய இடத்தில் கிடையான பலகையைக் கொண்ட மேசையின் (கிடைத் தளம்) மீது திசையறிகருவியை வைத்து, மேசையின் மீது வடக்குத் திசையைக் குறித்துக் கொள்க.
- இப்போது தயாரித்துக் கொண்ட கோணமானியை மேசையின் மீது வைத்து "0" என்ற வாசிப்பு வடக்குத் திசையுடன் பொருந்துமாறு அமைத்துக் கொள்க.
- பானம் உறிஞ்சும் குழாயைச் சுழற்றி அதனூடாகத் தேவையான இடத்தை அவதானித்து வடக்குடன் வலஞ்சுழியாக ஆக்கும் கோணத்தை அளந்து கொள்க.
- அதனை மூன்று இலக்கங்களைக் கொண்டதாக எழுதிக் கொள்ளும்போது தேவையான இடத்தின் திசைகோள் பெறப்படும்.
- அளவீட்டைப் பெற்ற புள்ளியிலிருந்து அவதானிக்கப்பட்ட இடத்துக்குரிய தூரத்தை அளவு நாடாவின் மூலம் பெறுக.
- அவ்விடத்தின் அமைவைப் பெறப்பட்ட தூரம், திசைகோள் என்பவற்றின் மூலம் விவரிக்க முடியும்.

கீழே உதாரணம் ஒன்று தரப்பட்டுள்ளது.

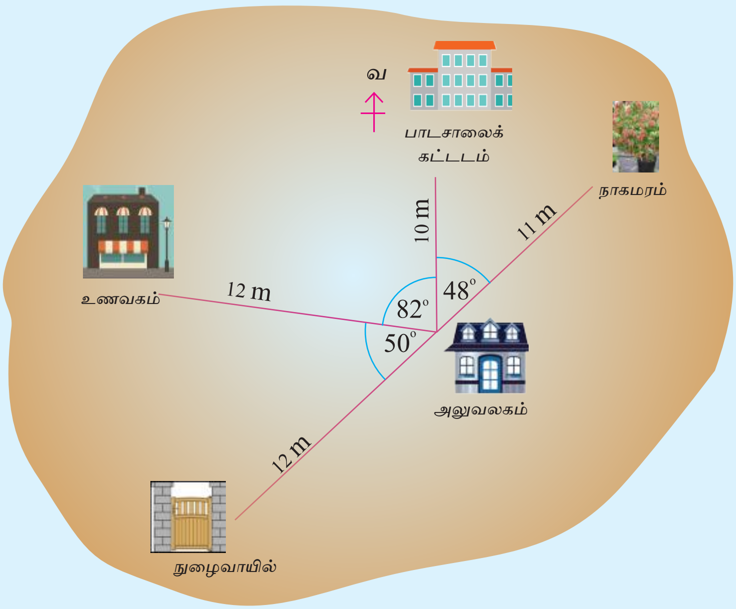


அவதானிக்கப்பட்ட பொருள்	திசை கோள்	தூரம்
பலா மரம் (*B*)	085°	20 m
தென்னமரம் (*C*)	145°	25 m
கிணறு (*D*)	225°	18 m

கீழே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சியைச் செய்வதன் மூலம் மேலும் விளக்கத்தைப் பெறுக.

பயிற்சி 27.2

1. கீழே காணப்படுவது ஒரு பாடசாலை அமைந்துள்ள நிலப் பகுதியின் பருமட்டான வரிப் படம் ஆகும்.



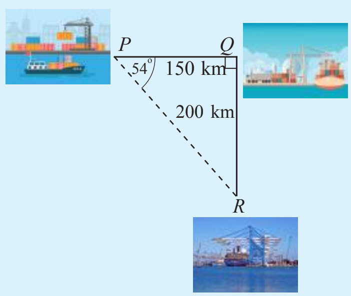
இதிலிருந்து பின்வரும் அமைவிடங்களை விவரிக்க.

(i) அலுவலகத்திலிருந்து நாகமரத்தின் அமைவிடம்
(ii) அலுவலகத்திலிருந்து நுழைவாயிலின் அமைவிடம்
(iii) அலுவலகத்திலிருந்து உணவகத்தின் அமைவிடம்

2. ஒரே கடலில் அமைந்துள்ள P, Q, R என்னும் மூன்று துறைமுகங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன. P இற்குக் கிழக்கே Q அமைந்துள்ளது.

(i) P இலிருந்து Q இனூடாக R இற்குச் செல்வதற்கும்
(ii) P இலிருந்து R இற்கு நேரடியாகச் செல்வதற்கும்

தேவையான பாதையின் விவரத்தைத் திசைகோள், தூரம் என்பனவற்றின் மூலம் தருக.



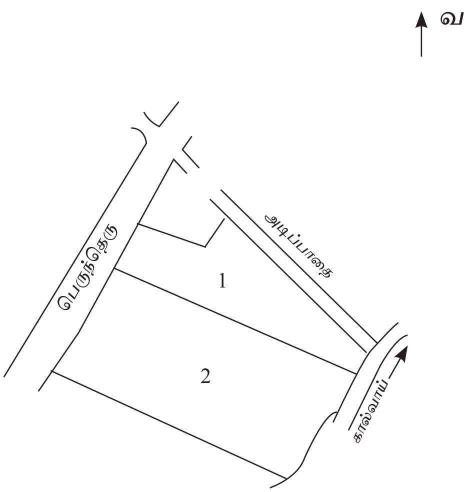
3. கொழும்பிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட விமான நிலையத்துக்குப் பயணிக்க வேண்டிய விமானத்தின் விமானிக்குக் கொழும்பிலிருந்து 020^{o} திசைகோளில் 100 km தூரம் விமானத்தைச் செலுத்தி, பின்னர் 080^{o} திசைகோளில் மேலும் 100 km தூரம் விமானத்தைச் செலுத்த வேண்டும் என அறிவுறுத்தப்பட்டது.

(i) இத்தகவல்களைப் பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றில் காட்டுக.

(ii) அவ்விமான நிலையத்திலிருந்து கொழும்புக்கு அதே பாதையில் திரும்புவதற்காக விமானிக்கு வழங்கப்பட வேண்டிய அறிவுறுத்தல்களைத் தருக.

27.3 கிடைத் தளத்தின் மீது அளவிடைப் படங்கள்

கிடைத் தளத்தின்மீது அமைவிடங்களைக் காட்டும் அளவிடைப்படங்களுக்குரிய இரண்டு உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



அளவிடை 1 : 1000

தெங்குப் பயிர்ச்செய்கை பரந்துள்ள பிரதேசங்கள்

அளவிடை 1 : 3300000

எல்லா அளவிடைப் படங்களிலும் அது வரையப்பட்டுள்ள அளவிடையும் வடக்குத் திசையும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அளவிடைப் படத்திலுள்ள அளவிடையினால் (விகிதத்தினால்) காட்டப்படுவது யாது என்பதைத் தெளிவாக விளங்குவது முக்கியம். உதாரணமாக 1 : 500 000 என்ற அளவிடையினால் கருதப்படுவது அளவிடைப் படத்தில் 1 cm நீளத்தினால் 500 000 cm என்ற உண்மை நீளம் குறிக்கப்படுகின்றது என்பதாகும். வேறு விதமாகக் கூறுவதாயின் அளவிடைப் படத்தில் இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரம் அப்புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள உண்மைத் தூரத்தின் $\frac{1}{500\ 000}$ பங்காகும். மேலும் 500 000 cm ஆனது 5 km இற்குச் சமம் ஆகையால் அளவிடைப் படத்தின் 1 cm இனால் காட்டப்படும் உண்மைத் தூரம் 5 km எனவும் கூறலாம்.

இப்போது கிடைத்தளத்தில் அளவிடைப் படங்களை வரையும் முறையை உதாரணங்கள் சிலவற்றின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

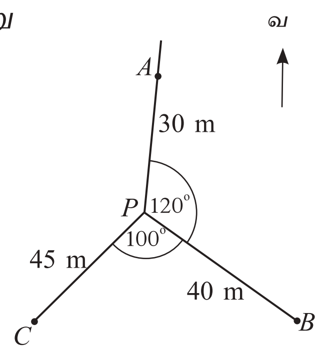
முக்கோணி வடிவமான காணித் துண்டு ஒன்றின் மூலைகள் A, B, C ஆகும். இக்காணித் துண்டினுள் அமைந்துள்ள P என்ற இடத்திலிருந்து உச்சிகளின் அமைவிடங்கள் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன.

P இலிருந்து
- 000° திசைகோளில் 30 m தூரத்தில் A அமைந்துள்ளது.
- 120° திசைகோளில் 40 m தூரத்தில் B அமைந்துள்ளது.
- 220° திசைகோளில் 45 m தூரத்தில் C அமைந்துள்ளது.

இத்தரவுகளுக்கு ஏற்ப அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைந்து காணித் துண்டின் சுற்றளவைக் காண்க.

படி 1: தாளின் வலது பக்கத்தின் மேற்பகுதியில் வடக்குத் திசையை உருவில் காட்டியவாறு குறித்துக் கொள்க.

படி 2: தரவுகளுக்கேற்ப உருவில் காட்டியுள்ளவாறு பருமட்டான வரிப்படம் ஒன்றை வரைக.



படி 3: 30 m, 40 m, 45 m தூரங்களைக் காட்டுவதற்கு 1 cm இனால் 10 m காட்டப்படும் வகையில் அதாவது 1:1000 என்ற அளவிடையைத் தெரிவுசெய்க. இங்கு அளவிடையானது அளவிடைப் படத்தை வரைவதற்குரிய தாளின் அளவுக்கு ஏற்பவே தெரிவுசெய்யப்பட வேண்டும். அத்தோடு 1000 போன்ற விசேட எண்களைத் தெரிவுசெய்வதால் அளவிடைப் படத்தைப் பரிசீலிப்பவருக்கு உண்மைத் தூரங்கள் பற்றிய தெளிவை இலகுவாகப் பெற்றுக் கொள்ள முடியும்.

படி 4 இவ்வளவிடைக்கு ஏற்பத் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நீளத்தையும் அளவிடைப் படத்தில் காட்டுவதற்குரிய நீளத்தைக் கணிக்க.

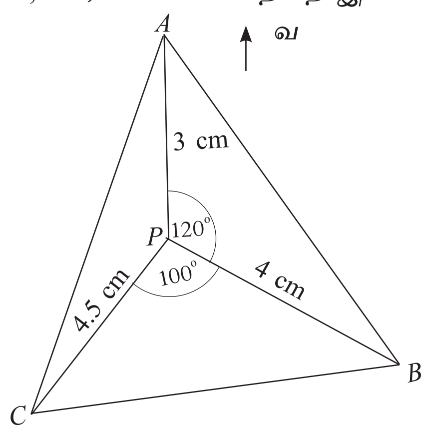
$$PA = 3000 \times \frac{1}{1000} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$PB = 4000 \times \frac{1}{1000} \text{ cm} = 4 \text{ cm},$$

$$PC = 4500 \times \frac{1}{1000} \text{ cm} = 4.5 \text{ cm}$$

படி 5 : cm அளவீட்டைக் கொண்ட நேர்விளிம்பையும் பாகைமானியையும் பயன்படுத்திப் பென்சிலால் கீழே குறிப்பிட்டவாறு அளவிடைப் படத்தை வரைக.

- முதலில் 3 cm நீளமுள்ள AP என்ற கோட்டுத் துண்டத்தை நிலைக்குத்தாக வரைக.
- PA உடன் 120° ஐ அமைக்கும் 4 cm நீளமுள்ள கோட்டுத் துண்டம் PB ஐ வரைக.
- PB உடன் 100° ஐ அமைக்கும் 4.5 cm நீளமுள்ள கோட்டுத் துண்டம் PC ஐ வரைக.
- AB, BC, AC என்பவற்றை இணைக்க.



படி 6: AB, BC, AC என்பவற்றின் நீளங்களை அளக்க. AB = 6 cm, AC = 7.1 cm, BC = 6.5 cm எனப் பெறுவீர்கள். எனவே அளவிடைப் படத்தின் சுற்றளவு 6 + 7.1 + 6.5 = 19.6 cm

படி 7: 1 cm ⟶ 10 m என்ற அளவிடைக்கு ஏற்ப உண்மை நீளத்தைக் கணிக்கலாம். காணியின் சுற்றளவு = 19.6 × 10 = 196 m

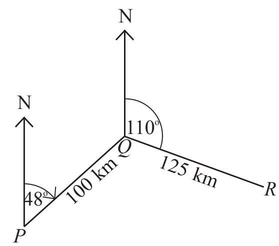
உதாரணம் 2

கப்பல் ஒன்று P என்னும் துறைமுகத்திலிருந்து 048° திசைகோளில் 100 km தூரம் பயணம் செய்து Q என்னும் துறைமுகத்தை அடைகின்றது. பின்னர் Q இலிருந்து 110° திசைகோளில் 125 km தூரம் பயணம் செய்து R என்னும் துறைமுகத்தை அடைகின்றது. அளவிடைப் படத்தை வரைந்து P இலிருந்து R இன் அமைவிடத்தை விவரிக்க.

படி 1: தாள் ஒன்றின் மீது P என்னும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. P இல் வடக்குத் திசையைக் குறிக்க.

படி 2 : கீழே வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைக் காட்டும் பருமட்டான வரிப்படத்தை வரைந்து கொள்க.

- P இலிருந்து Q இன் திசைகோள் 048° P ஆகையால் இலுள்ள வடக்குடன் PQ ஆக்கும் கோணம் வலஞ் சுழியாக 48° ஆகும்.
- Q இலிருந்து R இன் திசைகோள் 110° ஆகையால் Q இலுள்ள வடக்குடன் QR ஆக்கும் கோணம் வலஞ் சுழியாக 110° ஆகும்.



P இலுள்ள வடக்கும் Q இலுள்ள வடக்கும் சமாந்தரமாகையால் Q இலுள்ள வடக்குடன் PQ ஆக்கும் கோணம் $= 132^{\circ}$ (நேயக் கோணங்கள்)

இப்போது, $P\hat{Q}R = 360^{\circ} - (132 + 110)$
$= 360^{\circ} - 242^{\circ}$
$= 118^{\circ}$

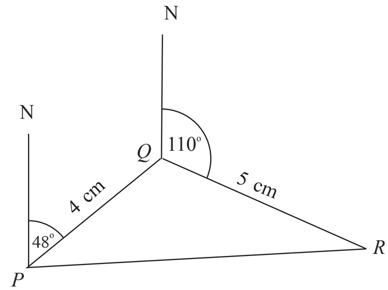
படி 3: 100 km ஐயும் 125 km ஐயும் வகைகுறிப்பதற்கும் 1 cm இனால் 25 km காட்டப்படும் வகையில் அதாவது 1:2 500 000 என்ற அளவிடையைத் தெரிவு செய்க. (தாளின் அளவு போதுமானதாயின்) 1:1 250 000 என்ற அளவிடையையும் தெரிவுசெய்யலாம்.

படி 4: அளவிடைக்கு ஏற்ப PQ, QR ஆகிய தூரங்களை அளவிடைப் படத்தில் காட்டுவதற்கு வேண்டிய நீளங்களைக் கணிக்க.

$$PQ = \frac{100}{25} \text{ cm} = 4 \text{ cm}, \quad QR = \frac{125}{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

(அளவிடைப் படத்தை வரையும்போது கோணங்கள் மாறுவதில்லை)

படி 5: மேலே குறிப்பிட்ட அளவீடுகளுக்கு ஏற்ப நேர் விளிம்பு, பாகைமானி, பென்சில் என்பவற்றைப் பயன்படுத்தி அளவிடைப் படத்தை வரைக.



படி 6: PR ஐ அளப்பதன் மூலம் $PR = 7.7$ cm எனப் பெறுவீர்கள். $N\hat{P}R$ ஐ அளப்பதன் மூலம் $N\hat{P}R = 82^{\circ}$ எனவும் பெறுவீர்கள்.

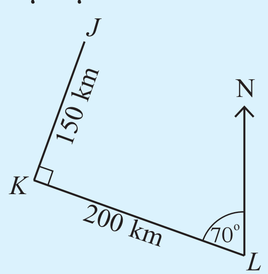
படி 7: அளவிடைக்கு ஏற்ப PR இன் உண்மை நீளத்தைக் கணிக்க.

PR இன் உண்மை நீளம் $= 7.7 \times 25$ km
$= 192.5$ km

படி 8: R இன் அமைவிடத்தைப் பின்வருமாறு விவரிக்கலாம்.
துறைமுகம் P இலிருந்து 082° திசைகோளில் 192.5 கிலோமீற்றர் தூரத்தில் துறைமுகம் R அமைந்துள்ளது.

பயிற்சி 27.3

1. L என்ற துறைமுகத்திலிருந்து K என்ற துறைமுகத்திற்குச் சென்று அங்கிருந்து J என்ற துறைமுகத்திற்குச் சென்ற கபப்ல் ஒன்றின் பயணப் பாதையின் பருமட்டான வரிப்படம் இங்கு தரப்பட்டுள்ளது.



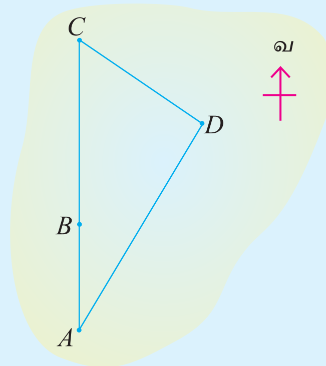
(i) இப்பருமட்டான வரிப்படத்திற்கு ஏற்பப் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
   (a) L இலிருந்து K இன் திசைகோள்
   (b) K இலிருந்து J இன் திசைகோள்
   (c) 1 cm இனால் 50 km காட்டப்படும் அளவிடைக்கு ஏற்ப LK, KJ ஆகிய தூரங்களை அளவிடைப் படத்தில் காட்டுவதற்கு எடுக்க வேண்டிய நீளங்களின் அளவுகளைக் காண்க.

(ii) மேற்கண்ட அளவிடைகளைக் கொண்டு கடல் மார்க்கத்தின் அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைக.

(iii) அளவிடைப் படத்தின் மூலம்
   (a) துறைமுகம் L இலிருந்து துறைமுகம் J இற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.
   (b) துறைமுகம் L இலிருந்து துறைமுகம் J இற்குள்ள திசை கோளைக் காண்க.

(iv) பைதகரசின் தொடர்பைப் பயன்படுத்தித் துறைமுகம் L இலிருந்து துறைமுகம் J இற்கு உள்ள தூரத்தைக் கணித்து மேலே (iii) b இல் நீங்கள் பெற்ற விடையைப் பரிசீலிக்க.

2. 1 : 50 000 என்ற அளவிடைக்கு வரையப்பட்ட படம் ஒன்றிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரு பகுதி உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. A, B, D ஆகிய நகரங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதோடு A இற்கு வடக்கே C அமைந்துள்ளது.



(i) AB, BC, CD, AD ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களின் நீளங்களையும் $A\hat{C}D$, $A\hat{D}C$, $C\hat{A}D$ ஆகிய கோணங்களின் பருமன்களையும் அளந்து எழுதுக.

(ii) AB, BC, CD, AD ஆகியற்றின் உண்மையான தூரங்களைக் கணிக்க.

(iii) A இலிருந்து B, C, D ஆகிய நகரங்களின் அமைவிடங்களைத் திசைகோள், தூரம் என்பனவற்றின் மூலம் விவரிக்க.

3. பாடசாலை ஒன்றின் கொடிக் கம்பத்திலிருந்து 025^{o} திசைகோளிலும் 10 m தூரத்திலும் அலுவலகம் அமைந்துள்ளதோடு கொடிக் கம்பத்திலிருந்து 310^{o} திசைகோளிலும் 12 m தூரத்திலும் பிரதான மண்டபம் அமைந்துள்ளது.

(i) இத்தகவல்களைக் காட்டும் வரிப்படம் ஒன்றை வரைக.

(ii) 1 cm இனால் 2 m காட்டப்படும் அளவிடையைக் கொண்டு இவற்றின் அளவிடைப் படத்தை வரைக.

(iii) அளவிடைப் படத்தின் மூலம் பாடசாலைக்கும் பிரதான மண்டபத்திற்கும் இடையிலுள்ள கிட்டிய தூரத்தைக் காண்க.

(iv) அலுவலகத்திலிருந்து பிரதான மண்டபத்தின் அமைவிடத்தை விவரிக்க.

4. விமானி ஒருவர் A என்ற விமான நிலையத்திலிருந்து 150^{o} திசைகோளின் வழியே 80 km தூரம் தனது விமானத்தைச் செலுத்திய பின், அவ்விடத்திலிருந்து 200^{o} திசைகோளின் வழியே 150 km தூரம் விமானத்தைச் செலுத்தி B என்னும் விமான நிலையத்தை அடைகின்றார்.

(i) இத்தகவல்களைக் காட்டும் பரும்படிப் படத்தை வரைக.

(ii) பொருத்தமான அளவிடையைக் கொண்டு அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைவதன் மூலம்

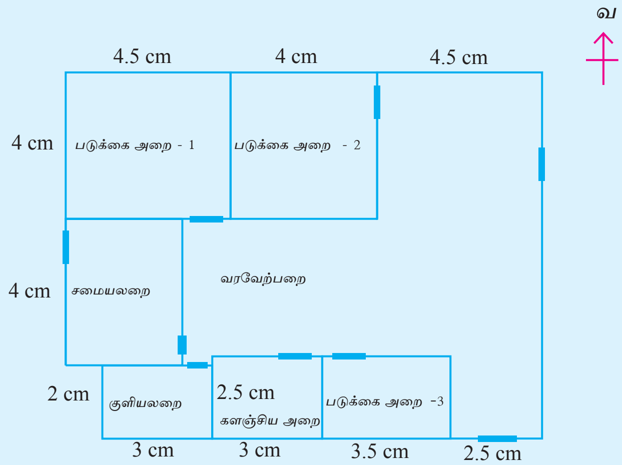
(a) A இலிருந்து B இன் திசைகோள்

(b) A இலிருந்து B இன் தூரம்

(c) B இலிருந்து A இன் திசைகோள்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. கட்டுவதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ள வீடு ஒன்றின் தளத்தின் கிடைப்படத்திற்கான அளவிடைப்படம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதனைக் கொண்டு கீழே தரப்பட்டுள்ள வினாக்களுக்கு விடை தருக.



(i) படுக்கை அறை 2 இன் உண்மையான நீளம் 4 m எனின், இக்கிடைப்படம் வரையப்பட்டுள்ள அளவிடையை விகிதமாகத் தருக.

(ii) வீட்டின் உண்மையான அகலத்தைக் காண்க.

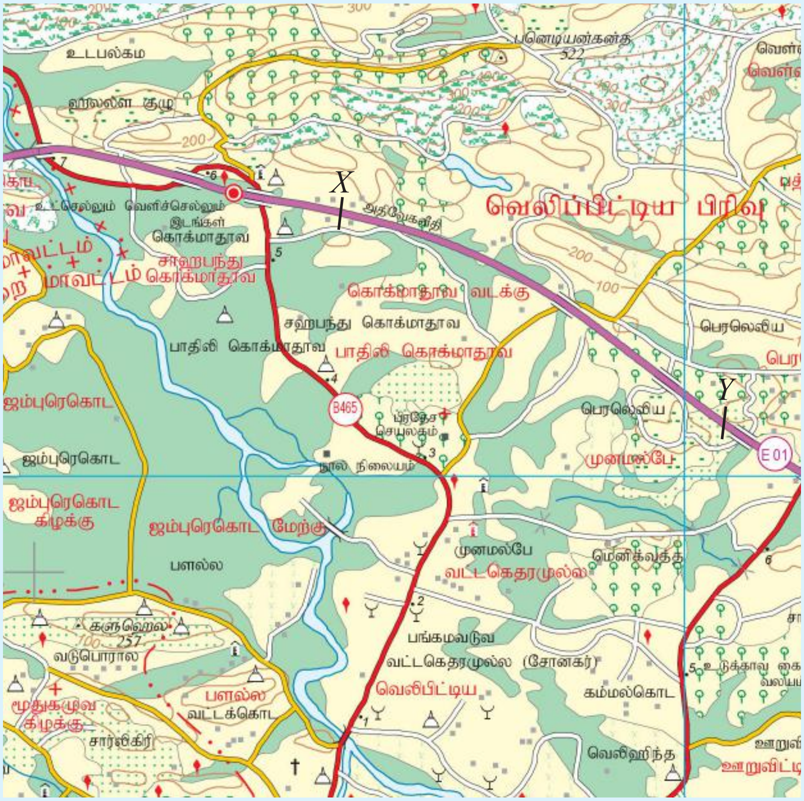
(iii) குளியலறையின் தளத்தின் பரப்பளவைச் சதுர மீற்றரில் காண்க.

6. களியாட்டத் தரை ஒன்றுக்குக் குறுக்காக மேற்கிலிருந்து கிழக்காக அமைந்துள்ள நேரான பாதை ஒன்றின் மீது நிற்கும் பயணி ஒருவர் 115^{o} திசைகோளில் கொடிக் கம்பம் ஒன்றை அவதானிக்கின்றார். அவர் கிழக்கு நோக்கி 220 m நடந்த பின்னர் அக்கொடிக் கம்பத்தை 210^{o} திசைகோளில் அவதானிக்கிறார்.

(i) கொடிக் கம்பத்திலிருந்து பயணி இரண்டாவது தடவை அவதானித்த இடத்தின் அமைவை விவரிக்க.

(ii) அளவிடைப் படம் ஒன்றை வரைந்து கொடிக் கம்பத்திலிருந்து பாதைக்குள்ள கிட்டிய தூரத்தைக் காண்க.

7.



1 : 1 000 000 என்ற அளவிடைக்கு வரையப்பட்ட இலங்கையின் வீதிகள் தொடர்பான தேசப்படத்தின் ஒரு பகுதி இங்கு தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு கருஞ் சிவப்பு நிறத்தில் காணப்படுவது *A* தரத்திலான பெருந்தெருவாகும்.

(i) படத்தில் 1 cm இனால் காட்டப்படும் உண்மையானத் தூரத்தை கிலோமீற்றரில் காண்க.

(ii) *A* தரத்திலான பெருந்தெருவில் *X* இலிருந்து *Y* வரை அமைந்துள்ள பகுதியின் நீளத்தை ஒரு நூலினால் அளந்து உண்மையான தூரத்தைக் கிலோமீற்றரில் காண்க.

28 தரவு வகைக்குறிப்பும் விளக்கமளித்தலும்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- தரப்பட்டுள்ள பச்சைத் தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குவதற்கும்
- ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் காண்பதற்கும்
- தரப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குவதற்கும்
- ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

ஒரு தரப்பட்ட பச்சைத் தரவுத் தொகுதியின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் காணும் விதம் பற்றி நீங்கள் தரம் 8 இற் கற்றுள்ளீர்கள். அதனை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. ஒரு பாடசாலைக் கிறிக்கெற்றுக் குழுவின் விளையாட்டு வீரர்களின் வயதுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

15, 16, 15, 16, 16, 19, 17, 18, 17, 16, 18

இத்தரவுகளின்

(i) வீச்சு (ii) ஆகாரம் (iii) இடையம் (iv) இடை

ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. குறித்த ஒரு மாதத்தின் முதல் இரு வாரங்களின்போது ஒரு வளிமண்டல நிலையத்தினால் சேகரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு நாளிலும் இருந்த கூடுதலான வெப்பநிலை கீழே (செல்சியஸ் பாகையில்) தரப்பட்டுள்ளது.

26, 28, 28, 29, 27, 28, 29, 30, 31, 28, 30, 31, 32, 27

இத்தரவுகளின்

(i) வீச்சு (ii) ஆகாரம்

(iii) இடையம் (iv) இடை

ஆகியவற்றைக் காண்க.

28.1 கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல்கள்

தரப்பட்ட பச்சைத் தரவுகளைப் (Raw data) பயன்படுத்தி எமக்குத் தேவையான தகவல்களைப் பெறும்போது தரவுகளை உகந்தவாறு ஒழுங்குபடுத்த வேண்டும். ஓர் உதாரணமாக ஒரு தரவுப் பந்தியின் இடையம் போன்ற ஒரு வகைக்குறிப்புப் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்குத் தரவுகளை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்த வேண்டும்.

குறைந்த எண்ணிக்கையில் தரவுகள் இருக்கும்போது தரவுகளை எளிதாக ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தலாம். எனினும், கூடிய எண்ணிக்கையில் தரவுகள் இருக்கும்போது அவ்வாறு ஒழுங்குபடுத்தல் ஓரளவுக்குக் கடினமாகும். அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் அட்டவணைகள் பயன்படுத்தப்படும்.

ஒரு குறித்த வகுப்பின் மாணவர்கள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

42, 70, 68, 68, 56, 62, 74, 74. 74, 56, 62, 85, 91, 91, 74, 74, 56, 68, 68, 68, 74

இத்தகவல்களைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

வரவுக்குறிகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் இவ்வட்டணையை மேலும் எளிதாகவும் சரியாகவும் தயாரித்துக் கொள்ளலாம்.

புள்ளிகள் (தரவு)	வரவுக் குறி	மாணவர் எண்ணிக்கை (மீடிறன்)
42	/	1
56	///	3
62	//	2
68	~~////~~	5
70	/	1
74	~~////~~ /	6
85	/	1
91	//	2

இந்த அட்டவணையின் மூன்றாம் நிரலினை **மீடிறன்** என்போம்.

முதலில் மீடிறன் என்பதன் கருத்துப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

இங்கு 42 என்னும் தரவு ஒரு தடவையும் 56 என்னும் தரவு மூன்று தடவைகளும் வந்துள்ளன. இவ்வாறு ஒரு குறித்த தரவு வந்துள்ள தடவைகளின் எண்ணிக்கை அத்தரவின் **மீடிறன்** எனப்படும்.

இதற்கேற்ப 42 இன் மீடிறன் 1 உம்
56 இன் மீடிறன் 3 உம்
62 இன் மீடிறன் 2 உம்
ஆகும்.

இவ்வாறு தரவுகளையும் அவற்றை ஒத்த மீடிறன்களையும் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் அட்டவணை **கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல்** எனப்படும். மேற்குறித்த தரவுக் கூட்டத்தைக் காட்டுவதற்குத் தயாரிக்கப்பட்ட கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

புள்ளிகள் (தரவு)	மாணவர் எண்ணிக்கை (மீடிறன்)
42	1
56	3
62	2
68	5
70	1
74	6
85	1
91	2

கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் ஆகாரம்

ஒரு தரவுக் கூட்டத்தில் கூடுதலான தடவைகள் வரும் தரவு அத்தரவுக் கூட்டத்தின் **ஆகாரம்** ஆகுமெனக் கற்றுள்ளீர்கள்.

மேற்குறித்த அட்டவணையின் மீடிறன் நிரலில் கூடுதலான மீடிறன் 6 ஆகும். மீடிறன் 6 ஐ ஒத்த தரவு 74 ஆகும். அதாவது, இத்தரவுகளின் ஆகாரம் 74 ஆகும்.

கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் இடையம்

ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் தரவுகளை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும்போது நடுவில் இருக்கும் தரவு அக்கூட்டத்தின் **இடையம்** ஆகுமென நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள்.

இங்கு மேலே நாம் தயாரித்த மீடிறன் அட்டவணையில் 21 தரவுகள் உள்ளன. அதற்கேற்ப நடுவில் உள்ளது 11 ஆம் தரவாகும். இப்போது 11 ஆம் தரவைக் காண வேண்டும். அதனைக் காணும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

மேற்குறித்த தரவுகளில்

1 ஆம் தரவு 42 உம்
2 ஆம் தரவு 56 உம்
3 ஆம் தரவு 56 உம்
.
.
.
6 ஆம் தரவு 62 உம் ஆகும் என்பதைக் அவதானிக்க. அதற்கேற்ப 11 ஆம் தரவை மீடிறன் நிரலின் கூட்டுத்தொகையைக் கொண்டு காணலாம். அதற்காக மீடிறன் நிரலின் கூட்டுத்தொகையைப் பக்கத்தில் எழுதுவோம்.

தரவு	மீடிறன்
42	1
56	3
62	2
68	5
70	1
74	6
85	1
91	2
	21

மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

1

$3 + 1 = 4$

$2 + 3 + 1 = 6$

$5 + 2 + 3 + 1 = 11$

தரவுக் கூட்டத்தின் 11 ஆம் தரவு 68 என மீடிறன் நிரலின் கூட்டுத்தொகையைக் கொண்டு எளிதாகக் காணலாம்.

தரவுகளின் எண்ணிக்கை கூடுதலாக இருக்கும்போது நடுவே வரும் தரவு இருக்கும் தானம் பற்றி ஒரே தடவையில் சிந்தித்துப் பார்த்தல் கடினமாக இருக்கலாம். ஆகவே நடுத் தானத்தைக் கண்டுபிடிப்பதற்குப் பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றுக.

குறிப்பு

தரவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஒற்றை எண்ணாக இருக்கும்போது நடுவில் இருக்கும் தரவின் தானத்தைத் $\dfrac{\text{தரவு எண்ணிக்கை} + 1}{2}$ இலிருந்து பெறலாம்.

மேலே பார்த்ததற்கேற்ப

தரவுக் கூட்டத்தின் தரவு எண்ணிக்கை $= 21$

தரவுக் கூட்டத்தின் இடையத்தின் அமைவு $= \dfrac{21 + 1}{2}$

$= \dfrac{22}{2}$

$= 11$ ஆம் ஈட்டாகும்.

11 ஆவது இடத்தில் அமைந்திடும் தரவு 68 ஆகும்.

$\therefore$ தரவுக் கூட்டத்தின் இடையம் 68 ஆகும்.

அதாவது மாணவர்கள் பெற்றுள்ள இடையப் புள்ளி 68 ஆகும்.

கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் இடை

ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் இடையைக் காண்பதற்குத் தரவுகளின் கூட்டுத்தொகையைத் தரவுகளின் எண்ணிக்கையினால் வகுக்க வேண்டுமெனத் தரம் 8 இல் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். பின்வரும் கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலைக் கொண்டு தரவுகளின் இடையைக் காணும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

இங்கு 42 ஆனது ஒரு தடவையும் 56 ஆனது 3 தடவைகளும் என்றவாறு காணப்படுகின்றது. இடையைக் காண்பதற்கு முழுத் தரவுகளினதும் கூட்டுத்தொகை காணப்பட வேண்டும்.

அதற்காகப் பின்வருமாறு ஓர் அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவோம்.

தரவு	மீடிறன் f	fx
42	1	$42 \times 1 = 42$
56	3	$56 \times 3 = 168$
62	2	$62 \times 2 = 124$
68	5	$68 \times 5 = 340$
70	1	$70 \times 1 = 70$
74	6	$74 \times 6 = 444$
85	1	$85 \times 1 = 85$
91	2	$91 \times 2 = 182$
	21	1455

தரவுகளின் கூட்டுத்தொகை = 1455

$$\text{தரவுகளின் இடை} = \frac{1455}{21}$$

$= 69.28$

≈ 69 (கிட்டிய முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டும்போது)

மாணவர்கள் பெற்றுள்ள இடைப் புள்ளி கிட்டிய முழுவெண்ணிற்கு 69 ஆகும்.

உதாரணம் 1

ஓர் ஆரம்பப் பாடசாலையில் தரம் 3 இன் 36 மாணவர்களின் திணிவுகள் (kg) கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

27	25	20	23	21	26	20	23	21	22	24	25
26	24	23	23	26	24	26	20	24	22	24	25
26	22	23	26	22	24	23	25	24	21	27	27

(i) தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

(ii) மேற்குறித்த தகவல்களைக் கொண்டு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

(iii) அட்டவணையைக் கொண்டு மாணவர்களின் திணிவுகளின்
(a) ஆகாரம் (b) இடையம் (c) இடை
ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) ஒரு மாணவனின் திணிவின் கூடிய பெறுமானம் = 27 kg
ஒரு மாணவனின் திணிவின் குறைந்த பெறுமானம் = 20 kg
∴ தரவுகளின் வீச்சு = 27 − 20
= 7

(ii)

ஒரு மாணவனின் திணிவு x (kg)	மீடிறன் f	மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை
20	3	3
21	3	6
22	4	10
23	6	16
24	7	23
25	4	27
26	6	33
27	3	36

(iii) (a) தரவுகளின் ஆகாரம் = 24 kg

(b) இங்கு 36 தரவுகள் உள்ளன. 36 ஓர் இரட்டை எண் ஆகையால், நடுவில் 2 தரவுகள் உள்ளன. அத்தகைய ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் இடையத் தரவானது நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளினதும் சராசரியாகும். முதலில் நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளினதும் அமைவுகளைக் காண்போம்.

குறிப்பு

தரவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஓர் இரட்டை எண்ணாக இருக்கும்போது நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளினதும் தானங்கள் முறையே $\frac{\text{தரவு எண்ணிக்கை}}{2}$, $\frac{\text{தரவு எண்ணிக்கை}}{2} + 1$ ஆகியவற்றிலிருந்து பெறப்படும்.

இடையத்தின் அமைவிடம் $= \frac{36}{2}, \ \frac{36}{2} + 1$

$= 18, \ 19$ ஆம் தரவுகள் ஆகும்.

நடுவே இருக்கும் இரு தரவுகளும் 18 ஆம் தரவும் 19 ஆம் தரவும் ஆகும்.

18 ஆம் தானத்தில் இடம்பெறும் தரவு = 24

19 ஆம் தானத்தில் இடம்பெறும் தரவு = 24

$\therefore$ தரவுகளின் இடையம் $= \frac{24 + 24}{2}$

$= \frac{48}{2}$

$= 24$ kg

(c)

ஒரு மாணவனின் திணிவு kg x	மீடிறன் f	$f \times x$
20	3	60
21	3	63
22	4	88
23	6	138
24	7	168
25	4	100
26	6	156
27	3	81
கூட்டுத்தொகை	36	854

தரவுகளின் கூட்டுத்தொகை = 854 kg

தரவுகளின் எண்ணிக்கை = 36

$\therefore$ தரவுகளின் இடை $= \frac{854 \text{ kg}}{36}$

$= 23.72$ kg (கிட்டிய இரண்டாம் தசம தானத்திற்கு)

பயிற்சி 28.1

1. ஒரு குறித்த வளிமண்டல நிலையத்தினால் 2016 டிசெம்பர் மாதத்தின் ஒரு நாளில் இருந்த கூடுதலான வெப்பநிலை பற்றிச் சேகரிக்கப்பட்ட ஒரு தகவற் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

28 26 28 28 29 30 28 26 27 27 27
28 26 25 24 24 25 25 26 27 28
28 27 26 28 27 28 29 30 28 27

(i) தரவுகளின் வீச்சு யாது?
(ii) இத்தரவுகளின் மீடிறன் பரம்பலுக்கான அட்டவணையைத் தயாரிக்க.
(iii) அட்டவணையைக் கொண்டு தரவுகளின் ஆகாரத்தைக் காண்க.
(iv) 2016 டிசெம்பர் மாதத்தின் ஒரு நாளின் இடைய வெப்பநிலையைக் காண்க.
(v) 2016 டிசெம்பர் மாதத்தின் ஒரு நாளின் இடை வெப்பநிலையைக் காண்க.

2. ஒரு காய்கறிச் சந்தையில் எலுமிச்சம் பழங்கள் விற்பனைக்காகப் பொதிசெய்யப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பொதியிலும் அடங்கும் எலுமிச்சம் பழங்களின் எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

5 3 4 6 2 3 4 5 3 4 6 5 3 4
4 2 4 3 5 3 3 4 2 5 3 2 4 3

(i) இத்தரவுகளின் வீச்சு யாது?
(ii) இத்தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.
(iii) தரவுகளின் ஆகாரத்தைக் காண்க.
(iv) ஒரு பொதியில் உள்ள எலுமிச்சம் பழங்களின் எண்ணிக்கையின் இடையத்தைக் காண்க.
(v) ஒரு பொதியுறையில் உள்ள எலுமிச்சம் பழங்களின் எண்ணிக்கையின் இடையைக் காண்க.

3. ஒரு கடையில் தினமும் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலின் மூலம் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு நாளில் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கை	8	9	10	11	12	13	14
நாட்களின் எண்ணிக்கை	3	5	8	6	4	3	1

(i) மீடிறன் பரம்பலின் வீச்சு யாது?
(ii) அட்டவணையைக் கொண்டு ஒரு நாளில் செலவிடப்படும் மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கையின் ஆகாரப் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(iii) தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க.
(iv) தகவல்கள் பெறப்பட்ட நாட்களில் ஒரு நாளில் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கையின் இடையைக் காண்க.

4. ஒரு கிராமிய மருத்துவமனையில் வெளிநோயாளர் பிரிவிலிருந்து தினமும் சிகிச்சை பெற்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை பற்றிச் சேகரிக்கப்பட்ட தகவல் களைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

ஒரு நாளில் சிகிச்சை பெற்ற நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை	29	30	31	32	33	34	35
நாட்களின் எணிக்கை	2	4	6	8	12	6	2

(i) தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
(ii) அத்தரவுகளின்
(a) ஆகாரம்
(b) இடையம்
(c) இடை
ஆகியவற்றைக் காண்க.

28.2 கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்கள்

இப்பகுதியில் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் என்பதன் கருத்தைப் பற்றியும் அதன் தேவை பற்றியும் அது தயாரிக்கப்படும் விதம் பற்றியும் பார்ப்போம்.
அதற்காகப் பின்வரும் உதாரணத்தைக் கருதுக.

ஒரு பரீட்சையில் பிள்ளைகள் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

21	26	28	32	34
36	36	38	39	39
39	40	41	41	41
41	42	45	48	48
52	53	56	66	68
70	75	80	81	83

இச்சந்தர்ப்பத்தில் தரவுகளிள் கூடிய பெறுமானம் 83 ஆக இருக்கும் அதேவேளை குறைந்த பெறுமானம் 21 ஆகும்.

இதற்கேற்பத் தரவுகளின் வீச்சு $= 83 - 21$
$= 62$.

இங்கு தரவுகளின் வீச்சு பெரிதாகையால் ஒவ்வொரு பெறுமானத்தின் கீழும் ஒரு கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பலைத் தயாரிக்கையில் மிகவும் நீளமான மீடிறன் பரம்பல் கிடைக்கும். அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் அத்தரவுகளின் வீச்சைக் கருதி எல்லாத் தரவுகளும் அடங்குமாறு கூட்டங்களாக வகுத்து வகைகுறிக்கப்படும். அத்தகைய ஒரு கூட்டம் **வகுப்பாயிடை** எனப்படும். வகுப்பாயிடைகளுடன் தயாரிக்கப்படும் மீடிறன் பரம்பல் **கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்** எனப்படும்.

அத்தகைய ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
10 - 19	3
20 - 29	6
30 - 39	5
40 - 49	2

இங்கு நான்கு வகுப்பாயிடைகள் உள்ளன.

வகுப்பாயிடை 10 - 19 இற்குத் தரப்பட்டுள்ள தரவுக் கூட்டத்தில் 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கும் தரவுகள் உள்ளன.

வகுப்பாயிடை 10 - 19 இற்குரிய 10 பெறுமானங்களின் தரவுகளை உள்ளடக்கலாம். ஆகையால் இவ்வகுப்பாயிடையின் **பருமன்** 10 ஆகக் கருதப்படும். எஞ்சிய வகுப்பாயி டைகளும் அவ்வாறேயாம்.

வகுப்பாயிடை 10 - 19 இன் மீடிறன் 3 என்பது கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலுக்குரிய தரவுக் கூட்டத்தில் 10, 11, 12, 13, ... , 19 என்னும் பெறுமானங்களிடையே 3 பெறுமானங்கள் மாத்திரம் இடம்பெறுகின்றன என்பதைக் கருதுகின்றது.

இப்போது நாம் ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் தயாரிக்கப்படும் விதத்தில் எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.

தரவுகளை வகுப்பாயிடைகளின் கீழ் அட்டவணைப்படுத்தும்போது முதலில் ஒரு வகுப்பாயிடையின் பரம்பல் அல்லது வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை பற்றித் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

தரவுகளைக் கூட்டமாக்கும் ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் தீர்மானிக்கப் பட்டிருக்கும்போது பின்வருமாறு வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையைப் பெறலாம்.

- தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
- தரவுகளின் பெறுமான வீச்சை ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனால் வகுக்க.
- அப்போது கிடைக்கும் பெறுமானத்தின் கிட்டிய கூடிய முழுவெண் வகுப்பாயி டைகளின் எண்ணிக்கையாகும்.

பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் இதனைப் பார்ப்போம்.
30 பிள்ளைகள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

21	26	28	32	34
36	36	38	39	39
39	40	41	41	41
41	42	45	48	48
52	53	56	66	68
70	75	80	81	83

இத்தரவுகளை ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் 10 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரிக்க வேண்டியுள்ளதெனக் கருதுவோம்.

முதலில் வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனை 10 ஆக எடுக்க வேண்டும். ஆகையால்,

வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{62}{10}$

$= 6.2$

≈ 7 (கிட்டிய கூடுதலான முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டும்போது)

ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனை 10 ஆக எடுக்கும்போது 7 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கிடைக்கும்.
அதன் குறைந்த தரவு 21 ஆகையால் முதல் வகுப்பாயிடையை 20 உடன் ஆரம்பிப் போம். 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 என்னும் 10 பெறுமானங்களையும் முதலாம் வகுப்பாயிடைக்கும் அடுத்த 10 பெறுமானங்களை அடுத்த வகுப்பாயிடைக்கும் என்றவாறு வகுப்பாயிடைகளைப் பிரிப்போம். அதற்கேற்பப் பின்வருமாறு வகுப்பாயிடைகள் கிடைக்கும்.

20 - 29, 30 - 39, 40 - 49, 50 - 59, 60 - 69

குறிப்பு

- இங்கு முதலாம் வகுப்பாயிடை 20 இல் ஆரம்பித்தாலும் தேவையெனின் 21இலும் ஆரம்பிக்கலாம். அப்போது வகுப்பாயிடைகள் 21 - 30, 31 - 40, 41 - 50 என்றவாறு கிடைக்கும்
- வகுப்பாயிடைகளை ஆக்கும்போது உகந்தவாறு வேறுவிதமாகவும் வகுப்புகளைக் காணலாம்.

இப்போது ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடைக்கும் உரிய தரவுகளை வரவுக்குறிகளைக் கொண்டு அட்டவணைப்படுத்துவோம்.

வகுப்பாயிடை	வரவுக்குறி	மீடிறன்
20 - 29	///	3
30 - 39	𝍸 ///	8
40 - 49	𝍸 ////	9
50 - 59	///	3
60 - 69	//	2
70 - 79	//	2
80 - 89	///	3

குறிப்பு

வரவுக்குறி நிரலை மீடிறன் பரம்பலில் காட்ட வேண்டியது அவசியமில்லை.

தரவுகள் கூட்டமாக்கப்பட வேண்டிய வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை தீர்மானிக்கப்பட்டிருக்கும்போது பின்வரும் படிமுறைகளைப் பின்பற்றி ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனைப் பெறலாம்.

- தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
- பெறுமான வீச்சைத் தேவையான வகுப்புக்களின் எண்ணிக்கையினால் (வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை 10 இலும் குறைவாக இருத்தல் உகந்தது) வகுக்க.
- அப்போது கிடைக்கும் பெறுமானத்தின் கிட்டிய முழுவெண்ணை வகுப்பாயிடைகளின் பருமனாகக் கொள்க.

இத்தரவுகளைப் பயன்படுத்தி 5 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் உருவாக்கப்படும் விதத்தைப் பார்ப்போம். முதலில் ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமனைக் காண்போம்.

தரவுகளின் வீச்சுப் பெறுமானம் $= 83 - 21$
$= 62$

வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையை 5 ஆக எடுக்க வேண்டும் ஆகையால்,

ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் $= \frac{62}{5}$

$= 12.4$

$\simeq 13$ (கிட்டிய அடுத்த முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டும்போது)

அதற்கேற்ப ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் 13 ஆகவுள்ள 5 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கிடைக்கும்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
20 - 32	4
33 - 45	14
46 - 58	5
59 - 71	4
72 - 84	3

இவ்வாறு எமது தேவைக்கேற்பத் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலைத் தயாரிக்கலாம்.

இங்கு தொடக்கக் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை மறுபடியும் கருதுக. அதில் முதலாம் வகுப்பாயிடை 20 - 29 ஆகவும் அடுத்த வகுப்பாயிடை 30 - 39 ஆகவும் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. 29 இற்கும் 30 இற்கும் இடையே புள்ளிகள் இருக்க முடியாது. ஆகையால் அவ்வாறு வகுப்பாயிடைகளைத் தெரிந்தெடுக்கலாம். அவ்வியல்பு இரண்டாம் மீடிறன் பரம்பலிலும் இருப்பதை அவதானிக்க.

எனினும் நீளம், நேரம், திணிவு போன்ற தரவுகளை வகுப்பாயிடைகளில் இடும்போது முதலாம் வகுப்பாயிடை முடிவடையும் தரவிலேயே அடுத்த தரவு ஆரம்பிக்க வேண்டும் என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்க.

அத்தகைய ஓர் உதாரணத்தை இப்போது கருதுவோம்.

ஒரு வகுப்பின் 20 பிள்ளைகளின் திணிவுகள் கிட்டிய முழுவெண்ணிற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு தரப்பட்டுள்ள திணிவுகள் கிட்டிய முழுவெண்ணிற்கு மட்டந்தட்டப்பட்டுள்ளன.

31	31	31	32	32
32	32	33	33	34
34	34	35	36	36
38	39	39	40	41

இத்தரவுகளுக்கான ஒரு வகுப்பாயிடையின் பருமன் 3 ஆகவுள்ள 4 வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலைத் தயாரிப்போம்.

முதலாம் வகுப்பாயிடை 30 - 33 ஆகவும் அடுத்த வகுப்பாயிடை 33 - 36 ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாகப் பின்வருமாறு வகுப்பாயிடைகளைத் தெரிந்தெடுப்போம்.

30 - 33

33 - 36

36 - 39

39 - 42

இவ்வாறு முதலாம் வகுப்பாயிடை முடிவடையும் பெறுமானமாகிய 33 இலேயே அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆரம்பிக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்குக் காரணம் இங்கு தரவுகள் திணிவு பற்றிச் சேகரிக்கப்பட்டிருப்பதாகும். 33 kg இற்கும் 34 kg இற்குமிடையே திணிவைக் கொண்ட பிள்ளைகள் இருக்கலாம். உதாரணமாக 33. 2 kg, 33.5 kg, 33.8 kg ஆகியவற்றைக் கருதலாம். ஆகவே ஒரு வகுப்பாயிடை முடிவடையும் பெறுமானத்திலேயே அடுத்த வகுப்பாயிடை ஆரம்பிக்க வேண்டும்.

இங்கு முதலாம் வகுப்பாயிடை 33 இல் முடிவடையும் அதேவேளை இரண்டாம் வகுப்பாயிடை 33 இல் ஆரம்பிக்கின்றது. அப்போது பெறுமானம் 33 எவ்வகுப்பாயிடைக்கு உரியது என்னும் வினா எழுகின்றது. இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் இரு வகுப்பாயிடைகளில் யாதாயினும் ஒன்றுக்கு மாத்திரம் அப்பெறுமானம் எடுக்கப்படும். தேவை ஏற்படும்போது அவ்வாறு நீர் தெரிந்தெடுக்கும் வழக்கைக் குறிப்பிடுதல் உகந்தது. இவ்வத்தியாயத்தில் பின்வருமாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு வகுப்பாயிடை 30 - 33 இல் 31, 32, 33 ஆகிய தரவுகளும்
வகுப்பாயிடை 33 - 36 இல் 34, 35, 36 ஆகிய தரவுகளும்
வகுப்பாயிடை 36 - 39 இல் 37, 38, 39 ஆகிய தரவுகளும்
வகுப்பாயிடை 39 - 42 இல் 40, 41, 42 ஆகிய தரவுகளும்
இடம்பெறுமாறு எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அவ்வாறு தயாரித்த கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்
30 - 33	9
33 - 36	6
36 - 39	3
39 - 42	2

குறிப்பு

கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்களைத் தயாரிக்கும்போது தரவுகளின் இயல்பைக் கருதி வகுப்பாயிடைகளை அமைக்க வேண்டும் என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்க.

பயிற்சி 28.2

1. 2017 ஜனவரி மாதத்தில் ஒரு வீடமைப்புத் திட்டத்தில் ஒவ்வொரு வீட்டிலும் செலவிடப்பட்ட மின் அலகுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றி மானி வாசிப்பாளர் சேகரித்த தரவுக் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

63 68 75 54 56 58 85 69 62 72
90 73 63 76 62 69 78 66 74 67
50 74 64 58 88 85 72 70 69 78
71 53 82 68 73 67 75 84 59 72
74 67

மேற்குறித்த தரவுகளைக் கொண்டு இத்தரவுகளுக்குரிய மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

2. ஒரு பாடசாலையில் தரம் 9 இல் கற்கும் மாணவர்கள் கணித வினாத்தாளிற்குப் பெற்ற புள்ளிகளின் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

34 27 45 12 63 35 54 29
42 68 73 54 26 11 63 54
33 69 62 38 53 48 63 61
60 44 67 61 79 65 47

(i) வினாத்தாளிற்கு ஒரு மாணவன் பெற்ற
(a) கூடிய புள்ளியையும்
(b) குறைந்த புள்ளியையும்
காண்க.

(ii) தரவுகளின் வீச்சைக் காண்க.

(iii) மேற்குறித்த தரவுகளை 7 வகுப்பாயிடைகளின் கீழ் அட்டவணைப்படுத்தி ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

3. ஓர் ஆரம்ப பாடசாலையின் தரம் 4 இன் ஒரு வகுப்பின் பிள்ளைகளின் உயரங்களை (சென்ரிமீற்றரில்) அளந்து பெற்ற தரவுகளின் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஓர் உகந்த கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

124 124 138 125 122 129 122 128 131 127 125 120 125
120 121 125 120 132 127 124 126 130 125 131 122 130
129 128 125 122 133 138 125 123 126 125 135 126 132

28.2 கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காணல்

ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்கும் விதம் பற்றி மேற்குறித்த பகுதியில் நாம் கற்றோம். இப்போது ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காணும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல்களின் வகுப்பாயிடைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றமையால் கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் ஆகாரத்தையும் இடையத்தையும் வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டு காட்டலாம்.

கூடிய எண்ணிக்கையில் தரவுகள் இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை கூட்டமாக்கிய தரவுகளின் **ஆகார வகுப்பு** ஆகும். எல்லாத் தரவுகளையும் ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும்போது நடுவில் கிடைக்கும் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை **இடைய வகுப்பு** ஆகும்.

உதாரணம் 1

பிள்ளைகள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகளைக் கொண்டு தயாரித்த கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

(i) இப்பரம்பலின் ஆகார வகுப்பு
(ii) இப்பரம்பலின் இடைய வகுப்பு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை
10 - 20	3	3
21 - 30	4	7
31 - 40	6	13
41 - 50	7	20
51 - 60	11	31
61 - 70	4	35

(i) கூடிய மீடிறன் 11 ஆகையால் தரவுகளின் ஆகார வகுப்பு $51 - 60$ ஆகும்.

(ii) தரவுக் கூட்டத்தின் இடையத்தின் அமைவு $= \frac{35 + 1}{2}$

$= 18$

18 ஆம் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை இடைய வகுப்பாகும்.

$\therefore$ இடைய வகுப்பு $41 - 50$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஓர் அலுவலகத்தில் பணியாற்றும் ஊழியர்களின் வயதுகளைக் கொண்டு தயாரிக்கப் பட்டுள்ள கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலின்

(i) ஆகார வகுப்பு

(ii) இடைய வகுப்பு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

வயது (வருடங்களில்) வகுப்பாயிடை	மீடிறன்	மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை
20 - 27	3	3
27 - 34	5	8
34 - 41	11	19
41 - 58	6	25
48 - 55	3	28

(i) கூடிய மீடிறன் $= 11$

$\therefore$ தரவுகளின் ஆகார வகுப்பு $= 34 - 41$

(ii) தரவுக் கூட்டத்தின் இடையம் இருக்கும் தானம் $= \frac{28}{2}, \frac{28}{2} + 1$

$= 14, 15$ ஆம் தரவுகள்

14 ஆம் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை $= 34 - 41$

15 ஆம் தரவு இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை $= 34 - 41$

∴ இடைய வகுப்பு 34 - 41 ஆகும்.

பயிற்சி 28.3

1. லொத்தர்ச் சீட்டு விற்பனையாளர் ஒருவர் 2016 மார்ச் மாதத்தில் தினமும் விற்ற லொத்தர்ச் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

380	390	379	402	370	385	397	386	377	405
400	381	390	375	392	384	391	385	387	395
390	393	373	386	378	395	379	396	395	391
373									

(i) ஒரு நாளில் கூடுதலாக விற்ற லொத்தர்ச் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(ii) ஒரு நாளில் குறைவாக விற்ற லொத்தர்ச் சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(iii) தரவுகளின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
(iv) பருமன் 6 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளைப் பயன்படுத்தித் தரவுகளை அட்டவணைப்படுத்தி ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.
(v) அட்டவணையைக் கொண்டு

a. தரவுகளின் ஆகார வகுப்பைக் காண்க.
b. தரவுகளின் இடையம் இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை யாது?

2. 2016 இன் முதல் தவணையில் ஒரு பாடசாலை நூலகத்திலிருந்து வெளியே கொண்டு செல்வதற்காக வழங்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைகள் பற்றியத் தினசரி குறிக்கப்பட்ட தரவுக் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

27	20	33	37	40	25	15	29	33	32
29	32	25	36	16	35	37	28	34	27
41	36	40	28	27	23	32	33	24	38

(i) தரவுகளின் வீச்சு யாது?
(ii) இத்தரவுகளைக் கொண்டு 15 - 19, 20 - 24, ... எனப் பருமன் 4 ஆகவுள்ள வகுப்பாயிடைகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலை உருவாக்குக.

(iii) அட்டவணையைக் கொண்டு ஒரு நாளுக்கு 30 இலும் கூடுதலாகப் புத்தகங்கள் வழங்கப்பட்ட நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iv) 31 இற்கும் 26 இற்குமிடையே உள்ள எண்ணிக்கையில் புத்தகங்கள் வழங்கப் பட்ட நாட்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(v) தரவுகளின் ஆகார வகுப்பு யாது?

(vi) தினமும் வெளியே கொண்டு செல்வதற்கு வழங்கப்பட்ட புத்தகங்களின் எண்ணிக்கைகளின் இடையம் இடம்பெறும் வகுப்பாயிடை யாது?

பலவினப்பயிற்சி

1. ஒரு தென்னந்தோட்டத்தில் தேங்காய்கள் பறிக்கப்படும் ஒரு பருவத்தில் ஒவ்வொரு தென்னையிலிருந்தும் பறிக்கப்பட்ட தேங்காய்களின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு பின்வரும் கூட்டமாக்காத மீடிறன் பரம்பல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

தேங்காய்களின் எண்ணிக்கை	மீடிறன்
8	3
10	5
12	8
13	7
14	5
15	2

(i) தரவுகளின் ஆகாரத்தைக் காண்க.

(ii) தரவுகளின் இடையத்தைக் காண்க.

(iii) ஒரு தென்னையிலிருந்து பறிக்கப்பட்ட தேங்காய்களின் எண்ணிக்கையின் இடையைக் காண்க.

2. ஒட்டுப்பலகையைத் தயாரிப்பதற்கு வழங்கப்பட்ட இறப்பர் மரங்களின் தண்டுகளின் சுற்றளவுகளை (cm இல்) அளந்து பெற்ற தரவுக் கூட்டம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

95	112	118	86	103	102	94	98	80	97
87	105	85	103	95	106	98	94	110	102
103	105	90	110	96	100	89	104	98	114
106	98	98	112	86	105	97	107	96	92
115									

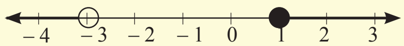
(i) மேற்குறித்த தரவுகளை 8 வகுப்பாயிடைகளின் கீழ் அட்டவணைப்படுத்துக.

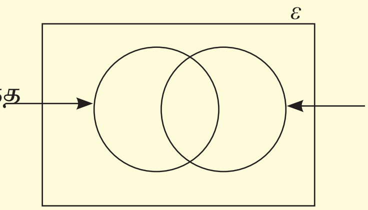
(ii) தரவுகளின் ஆகார வகுப்பைக் காண்க.

(iii) தரவுகளின் இடைய வகுப்பைக் காண்க.

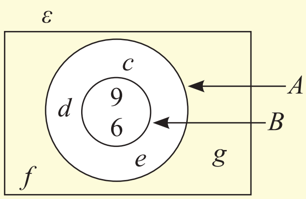
மீட்டற் பயிற்சி 3
பகுதி I

1. $x - 3 < -1$ என்னும் சமனிலியின் தீர்வை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

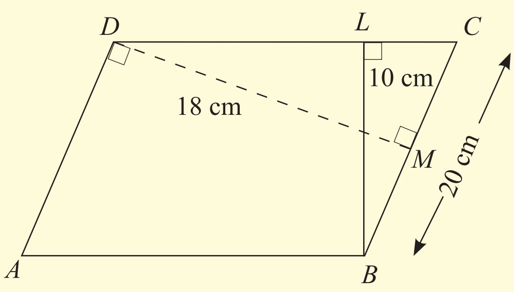
2.  எண் கோட்டின் மீது நிழற்றியுள்ள பகுதியைச் சமனிலி மூலம் தருக.

3. 

குறித்த ஒரு பாடசாலையில் தரம் 9 மாணவர்களின் தகவல்களைக் குறிப்பதற்காக வரையப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தில் 13 வயதிலும் குறைந்த பெண் பிள்ளைகளைக் குறிக்கும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

4. 

வென் வரிப்படத்திலிருந்து B' இன் மூலகங்களை எழுதுக. இத்தொடைக்குச் சமனாகும் இன்னொரு தொடையைப் பெயரிடுக.

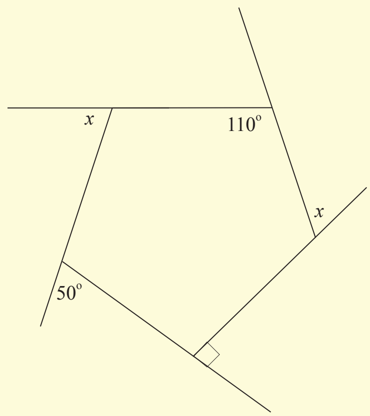
5. 

இணைகரம் $ABCD$ இல் $BC = 20$ cm, $BL = 10$ cm, $DM = 18$ cm ஆகும். இணைகரம் $ABCD$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

6. 1 இலிருந்து 20 வரை எண்கள் எழுதப்பட்ட அட்டைகளின் ஒரு தொகுதியிலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்ட அட்டையில் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண் ஒரு முக்கோண எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. **"numbers"** என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களின் தொடையை A எனப் பெயரிட்டு, அவ்வெழுத்துக்களின் தொடையிலிருந்து எழுமாற்றாக ஓர் எழுத்தைத் தெரிந்தெடுத்தால் அது எழுத்து "m" ஆவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



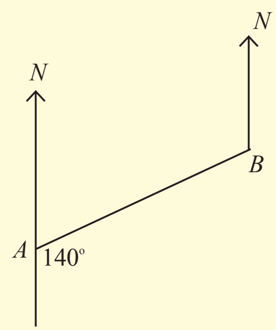
9. ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியில் ஓர் அகக்கோணத்தின் பெறுமானம் புறக் கோணத்தை விட 150° இனால் கூடியதாகும். பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

10. சுருக்குக . $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3x-2}{6}$

11. சுருக்குக . $\dfrac{a+1}{a-3} - \dfrac{4-2a}{a-3}$

12. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து

(i) A இலிருந்து B இன் திசைகோளையும்
(ii) B இலிருந்து A இன் திசைகோளையும்
காண்க.

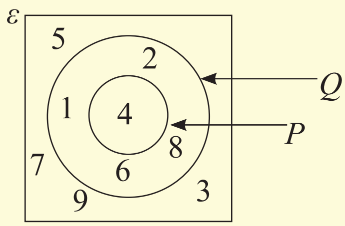


13. 1 : 50 000 என்னும் அளவிடைக்கு வரையப்பட்ட ஓர் அளவிடைப் படத்தில் A, B ஆகிய இரண்டு நகரங்களுக்கிடையிலுள்ள உண்மையான தூரம் 8 km ஐக் குறிப்பதற்குத் தேவையான கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளம் யாது?

14. 12, 8, x, 5, 10 என்னும் தரவுக் கூட்டத்தின் இடை 10 ஆயின், இடையத்தைக் காண்க.

பகுதி II

1. (A) தரப்பட்டுள்ள வென் வரிப்படத்தில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $\subset$, $\in$ ஆகிய குறியீடுகளைப் பொருத்தமான வகையில் பயன்படுத்தி வெற்றிடங்களை நிரப்புக.



(i) 4 —— Q (ii) 7 —— Q
(iii) P —— ε (iv) P —— Q
(v) $(P \cap Q)$ —— P

(B) i. $n(P)'$ ஐ எழுதுக.
ii. $(Q)'$ இற்கு எழுதக்கூடிய தொடைப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை யாது? அவற்றுள் நான்கை எழுதுக.

(C) ε = {1 இலிருந்து 20 வரையுள்ள எண்ணும் எண்கள்}
A = {1 இலிருந்து 20 வரையுள்ள 3 இன் மடங்குகளான எண்கள்}
B = {1 இலிருந்து 20 வரையுள்ள 2 இன் மடங்குகளான எண்கள்}

i. மேற்குறித்த மூன்று தொடைகளினதும் மூலகங்களை எழுதுக.
ii. பொருத்தமான வகையில் மேற்குறித்த தொடைகளை ஒரு வென் வரிப்படத்தில் குறிக்க.
iii. மேலே (ii) இலிருந்து கீழே தரப்பட்டுள்ள தொடைகளின் மூலகங்களை எழுதுக.

a. $A \cap B$ **b.** $A \cup B$
c. A' **d.** B'

2. பாடசாலை ஒன்றில் உள்ள சிற்றுண்டிச்சாலையில் 50 தினங்களில் விற்கப்பட்ட பால் பைக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

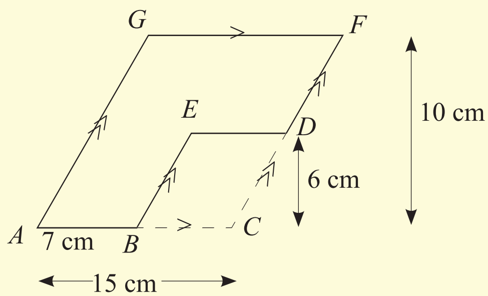
31	34	38	40	44	43	45	47	45	50
53	52	58	55	54	53	61	63	65	66
66	68	64	63	66	67	62	63	66	70
71	73	74	75	76	72	73	72	74	81
82	82	82	83	83	84	8	85	92	96

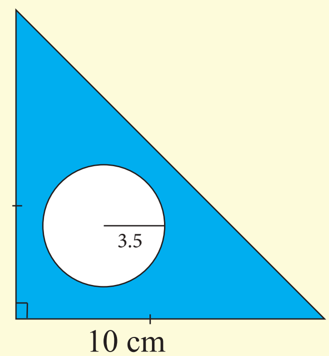
(i) இத்தரவுகளின் வீச்சைக் காண்க.

(ii) வகுப்பாயிடை 31 - 40, 41 - 51, 50 - 60 என்றவாறு அமையும் வகையில் கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் அட்டவணை ஒன்றைத் தயாரிக்க.

(iii) மேலே கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளின் ஆகார வகுப்பையும் இடைய வகுப்பையும் காண்க.

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவங்களின் பரப்பளவுகளைக் கணிக்க





4. (*a*) ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியில் ஓர் அகக்கோணத்தின் பெறுமானம் ஒரு புறக் கோணத்தின் பெறுமானத்திலும் 100° கூடியதாயின்,

(i) ஒரு புறக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

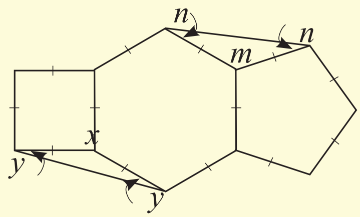
(ii) பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*b*) ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியில் ஓர் அகக்கோணத்திற்கும் ஒரு புறக்கோணத் திற்கும் இடையிலான விகிதம் 3 : 1 ஆயின், அகக்கோணங்கள் எல்லாவற் றினதும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(*c*) ஒரு பல்கோணியில் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையின் ஐந்து மடங்காயின், அதன் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*d*) குறித்தவொரு பல்கோணியில் நான்கு அகக்கோணங்களின் பெறுமானங்கள் முறையே 160°, 140°, 130°, 110° ஆவதுடன் அதன் எஞ்சிய புறக் கோணங்கள் அனைத்தும் 30° வீதம் அமையுமாயின், இப்பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(e) உருவில் உள்ளவாறு குறித்தவொரு ஆக்கத்தில் ஒரு சதுரம், ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி, ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஆகியவை ஒன்றுடனொன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளன. x, y, m, n ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களை காண்க



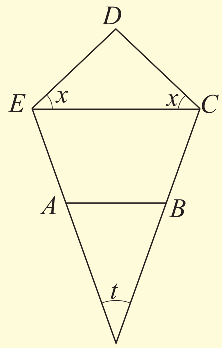
(f) $ABCD$ ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணியாகும்.

(i) ஓர் உச்சியிலுள்ள அகக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) EC, AB ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

(iv) t இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



5. ***A*** i. $x-1\leq-3$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து, தீர்வுத் தொடையை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

ii. $\frac{2x}{3} > -2$ என்னும் சமனிலியைத் தீர்த்து, தீர்வுகளை ஓர் எண் கோட்டின் மீது குறிக்க.

B 10 லீற்றரைக் கொள்ளத்தக்க ஒரு பாத்திரத்தில் 3 லீற்றர் நீர் உண்டு. அதற்கு மேலும் x l நீரைச் சேர்க்கும்போது நீரின் அளவை $3 + x \leq 10$ என்னும் சமனிலி மூலம் காட்டலாம். சமனிலியைத் தீர்த்து பாத்திரத்தில் சேர்த்த நீரின் அளவைக் காண்க.

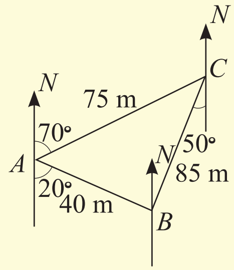
C சுருக்குக.

i. $\frac{m+1}{3} - \frac{1+2m}{2} + \frac{3m+2}{4}$

ii. $\frac{a+5}{a+3} - \frac{2-a}{3+a} + \frac{a}{a+3}$

6. **A.** கிடைத் தளம் ஒன்றில் அமைந்துள்ள A, B, C என்னும் 3 புள்ளிகளின் பருமட்டான அமைவுகளைக் குறிக்கும் ஒரு படம் இங்கு தரப்பட்டுள்ளது.

(i) A இலிருந்து B இன் திசைகோளைக் காண்க.
(ii) B இலிருந்து A இன் அமைவை விவரிக்க.
(iii) C இலிருந்து A இன் திசைகோளைக் காண்க.



B. வடக்குத் தெற்காகச் செல்லும் ஒரு நேர்ப் பாதையில் அமைந்துள்ள புள்ளி A இலிருந்து பாதையின் இடது பக்கத்தில் உள்ள ஒரு பாடசாலை வளவில் அமைந்துள்ள ஒரு நீர்த் தாங்கி 230^{o}திசைகோளில் தெரிகிறது. A இலிருந்து பாதை வழியே 140 m தெற்கு நோக்கி வந்து புள்ளி B இலிருந்து நீர்த் தாங்கியை அவதானித்தபோது திசைகோள் 300^{o} ஆக இருந்தது.

i. இத்தகவல்களை அடக்கிய பருமட்டான படம் ஒன்றை வரைக.
ii. பொருத்தமான ஓர் அளவிடையில் ஓர் அளவிடைப்படத்தை வரைந்து அதிலிருந்து நீர்த் தாங்கியிலிருந்து A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்குள்ள தூரத்தைக் கணிக்க.
iii. பாதையிலிருந்து நீர்த்தாங்கிக்கு உள்ள மிகவும் குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

7. குறித்த ஒரு வங்கிக்கு வருகை தந்த வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையும், நாட்களின் எண்ணிக்கையும் பற்றிய தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை	65	66	67	68	69	70	71	72
நாட்களின் எண்ணிக்கை	2	5	8	10	12	8	6	4

i. மேற்குறித்த பரம்பலின் வீச்சைக் காண்க.
ii. மேற்குறித்த தரவுகளின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் காண்பதற்குப் பொருத்தமான ஓர் அட்டவணையைத் தயாரித்துத் தரவுகளைக் குறிக்க.
iii. மேற்குறித்த அட்டவணையிலிருந்து தரவுப் பரம்பலின் ஆகாரம், இடையம், இடை ஆகியவற்றைக் கணிக்க.