இருபடிச் சமன்பாடுகள்

1. இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொதுவடிவத்தை எழுதுவர்
2. இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை அறிவார்
3. இருபடிச் சமன்பாட்டின மூலங்களின் கூட்டுத்தொகையை எழுதுவர்
4. இருபடிச் சமன்பாட்டின மூலங்களின் பெருக்கத்தை எழுதுவர்
5. மூலங்கள் தரப்படின் இருபடிச் சமன்பாட்டை எழுதுவர்
6. உருமாற்ற முறையினால் இருபடிச்சமன்பாட்டை எழுதுவர்
7. இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு பொது மூலம் இருப்பின் குணகங்களுக்கு இடையேயான தொடர்பைப் பெறுவர்
8. மூலகங்களுக்கு இடையே தொடர்பு இருப்பின் குணகங்களுக்கிடையே தொடர்பைப் பெறுவர்
9. இருபடிச் சமன்பாட்டின மூலங்களின் தன்மையை ஆராய்வர்
10. இருபடிச் சமன்பாட்டின மூலங்களின் குறியை ஆராய்வர்

இருபடிச் சமன்பாட்டின மூலங்கள் என்பது அச்சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் பெறுமானங்கள் என்பதை அறிவர்

பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு தேவையான முன்னறிவு

காரணிப்படுத்துவதன் மூலம்

01. இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்

$$ax^2 + bx + c = 0 : a, b, c \in \Re \quad a \neq 0$$

என்பது x இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் ஆகும்

உதாரணம்

01. $3x^2 - 2x + 1 = 0$
02. $y^2 + 7y - 5 = 0$
03. $(\lambda - 1)x^2 + \lambda x + (\lambda^2 + 1) = 0 \quad \lambda \neq 1$
04. $a x^2 + 6 = 0 \quad a \neq 0$

02. இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் (மூலங்கள்)

2.1 காரணி முறைத் தீர்வு
2.2 வரைபு முறைத் தீர்வு
2.3 நிறைவர்கமாக்கல் முறைத் தீர்வு
2.4 சூத்திர முறைத் தீர்வு

நிறைவர்க்கமாக்கலின் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு பின்வருமாறு பெறப்படும்

$$ax^2 + bx + c = 0 : a, b, c \in \Re \quad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{x}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{x}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{x}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = - \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ எனின் $\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ஆகும் இங்கு α,β என்பன இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகும்

ஆகவே இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு இரு மூலங்கள் உண்டு. இங்கு $b^2 - 4ac$ என்பதுஇருபடிச. சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி அல்லத பிரித்துக் காட்டி அல்லது பிரித்துக் காட்டி எனப்படும். இங்கு Δ குறிக்கப்படும்

அதாவது $\Delta = b^2 - 4ac$ ஆகும்

ஆகவே $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

03. இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

மூலகங்களின் கூட்டுத்தொகை = $\dfrac{\text{x இன் குணகம்}}{\text{x}^2 \text{ இன் குணகம்}}$

04. இருபடிச. சமன்பாட்டின் மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை

$$\alpha\beta=\left[\ \frac{-b+\sqrt{b^2}\,4ac}{2a}\ \right]\left[\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \right]$$

$$=\frac{c}{a}$$

மூலகங்களின் பெருக்குத் தொகை = $\dfrac{\text{மாறிலி}}{\text{x}^2 \text{ இன் குணகம்}}$

குறிப்பு :- 01.பரீட்சை நோக்கில் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கும் பெருக்குத்தொகைக்குமான தொடர்பை வினவும் போது முதற்தத்துவத்தில் இருந்து நிறுவப்படல் வேண்டும்.

குறிப்பு :- 02 கீழ்க்காணும் முறை மூலமும் மூலகங்களுக்கு இடையேயான கூட்டுத்தொகை பெருக்குத் தொகைக்கு இடையேயான தொடர்பை பெறலாம்

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலகங்கள் α,β எனின்

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ இன் மூலங்களும் α,β ஆகும்

$$ax^2+bx+c=a\{(x-\alpha)(x-\beta)\}$$

$$a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}=a\{(x-\alpha)(x-\beta)\}$$

$$a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

குறிப்பு 03. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ இன் மூலங்கள் α, β,γ எனின்

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$ ஆகும்

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\{x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\beta)x - \alpha\beta r$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

பயிற்சி

4.1 $2x^2 - 3x + 2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம் இதன் மூலங்கள் β ,α ஆகும் பின்வரும் வினாக்களிற்கு விடையளிக்க

1. $\alpha + \beta$ இன் பெறுமானம் யாது?
2. α ,β இன் பெறுமானம் யாது?
3. $\alpha^2 + \beta^2$ இனை $(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta$ சார்பில் தருக. இதிலிருந்து $\alpha^2 + \beta^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க
4. $\alpha^3 + \beta^3$ இனை $(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta$ சார்பில் தருக. இதிலிருந்து து $\alpha^3 + \beta^3$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க
5. $\alpha^4 + \beta^4$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4.2 $3x^2 - 4x + 2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம் இதன் மூலங்கள் β ,α ஆகும் பின்வரும் வினாக்களிற்கு விடையளிக்க

1. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
2. $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
3. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4.3 $x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α ,β எனின் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை a,b இன் சார்பில் தருக

1. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
2. $\alpha^3 - \beta^3$ இனை $(\alpha - \beta),(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta$ சார்பில் எழுதுக.
3. $(\alpha - \beta)^2$ இனை $(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta$ இதிலிருந்து $\alpha - \beta$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

4.4 $2x^2 - qx + r = 0$ இன் மூலங்கள் α , β என்க பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை q, r சார்பில் காண்க

1. $(\alpha + 1)(\beta + 1)$

2. $\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} + 1\right)$

3. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

4.5 $(\lambda + 1)x^2 + 3(\lambda + 1)x - (\lambda + 1) = 0, \lambda \neq 1$ என்பதன் மூலங்கள் m,n என்க பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை λ சார்பில் தருக

1. m + n

2. mn

3. $(2m + 3n)(3m + 2n)$

4. $\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right)$

5. $\left(\frac{1}{m^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 1}\right)$

5.1 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் அச்சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும்

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \Re$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்

$ax^2 + bx + c = 0, a\alpha^2 + b\beta + c = 0$ ஆகும்

குறிப்பு $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்

1. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

2. $\alpha\beta = -\frac{c}{a}$

3. $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

4. $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ ஆகும்

பயிற்சி

5.1 $x^2 + x + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்

1. $x^2 + x + 1 = 0$ இன் பெறுமானம் யாது.
2. $\beta^2 + \beta - 1 = 0$ இன் பெறுமானம் யாது.
3. $x^2 = \beta + 2$ என நிறுவுக.
4. $\beta^2 = \alpha + 2$ என நிறுவுக.

5.2 $2x^2 + 3x + 5 = 0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்

$2(\alpha^3 + \beta^3) - 3(\alpha^2 + \beta^2) + 5(\alpha + \beta)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

5.3 $x^2 + ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் λ , μ எனின்

1. $x^2 + a\lambda + \mu^2 + a\mu = 0$ இன் பெறுமானத்தைக் a,b யில் காண்க
2. $\frac{2}{\lambda^2 + a\lambda} + \frac{3}{\mu^2 + a\mu}$ இன் பெறுமானத்தைக் a,b யில் காண்க

5.4 $x^2 - 7x + 2 = 0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆகும்

$s_n = \alpha^n + \beta^n$ எனத் தரப்படின்

$s_{n+1} - 7s_n + 2s_{n-1} = 0$ எனக் காட்டுக இதிலிருந்து S_3 இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

5.5 $x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்

$A_n = \alpha^n + \beta^n$ எனத் தரப்படின்

$A_{n+1} = aA_n + bA_{n-1}$ எனக் காட்டுக

A_2, A_3, A_4 இன் பெறுமானத்தைக் காண்பதன் மூலம் A_5 இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக

6.0 மூலங்கள் தரப்படின் இருச்சமன்பாட்டைப் பெறல் λ, μ என்பவற்றை மூலங்களாக உடைய இருபடிச்சமன்பாடு

$(x-\lambda)(x-\mu) = 0$ ஆகும்

$x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu = 0$

X^2 – (மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை) X + மூலங்களின் பெருக்குத்தொகை

பயிற்சி

6.1 $x^2 - px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும்

பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை p,q சார்பில் தருக

1. $\alpha + \beta$
2. $\alpha\beta$
3. $(\alpha+1), (\beta+1)$ இன் கூட்டுத்தொகை
4. $(\alpha+1), (\beta+1)$ இன் பெருக்குத்தொகை
5. $(\alpha+1), (\beta+1)$ இனை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6.2 $x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்

$(\alpha^2+\beta),(\beta^2+\alpha)$ இனை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

6.3 $ax^2-bx+1=0$ இன் மூலங்கள் m , n எனின்

$\left(m+\frac{1}{m}\right),\left(n+\frac{1}{n}\right)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை காண்க

6.4 $2x^2-px+q=0$ இன் மூலங்கள் r , s எனின்

$(2r+s),(r+2s)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை p,q இன் சார்பில் தருக.

6.5 $9y^2+4(a+y)=0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்

$(\alpha^2-1),(\beta^2+1)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை பெறுக? இங்கு a மாறிலி

7. பொருத்தமான பிரதியீட்டின் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டை பெறல். (உருமாற்ற முறைமூலம்)

பயிற்சி

7.1 $x^2-px+q=0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆகும்

1. $(\alpha+1),(\beta+1)$ இனை மூலகங்களாக உடைய சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கு பொருத்தமான பிரதியீட்டை எழுதுக.
2. இதிலிருந்து˙ 2α , 2β இனை மூலகங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டைப் பெறுக.

7.2 $ax^2 - cx + b = 0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆகும்

1. $2\alpha , 2\beta$ இனை மூலகங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கு பொருத்தமான பிரதியீட்டை எழுதுக.
2. இதிலிருந்து $2\alpha , 2\beta$ இனை மூலகங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டைப் பெறுக.

7.3 $x^2 - bx + a = 0$ இன் மூலங்கள் λ , μ ஆகும்

1. $(3\lambda - 1)(3\mu - 1)$ இனை மூலகங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கு பொருத்தமான பிரதியீட்டை எழுதுக.
2. இதிலிருந்து $(3\lambda - 1)(3\mu - 1)$ இனை மூலகங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டைப் பெறுக.

7.4 $x^2 - px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆகும்

1. $2\alpha + 3\beta$ ஐ p,q சார்பிலும் $3\alpha + 2\beta$ ஐ p, α சார்பிலும் எழுதுக.
2. $(2\alpha + 3\beta),(3\alpha + 2\beta)$ னை மூலகங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கு பொருத்தமான பிரதியீட்டை b யின் சர்பில் எழுதுக.
3. இதிலிருந்து $(2\alpha + 3\beta),(3\alpha + 2\beta)$ இனை மூலகங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டைப் பெறுக.

7.5 $x^2 - ax + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆகும்

1. $(\alpha^2 + \beta^2)$ இன் பெறுமானத்தை a சார்பில் காண்க

2. $(\alpha^2 \beta^2)$ இன் பெறுமானத்தை a சார்பில் காண்க

3. இதிலிருந்து $(\alpha^2 \beta^2)$ இனை மூலகங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டை a சார்பில் காண்க.

4. $\left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta^2}\right),\left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$ இனை மூலகங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கு பொருத்தமான பிரதியீட்டை எழுதுக.

5. இதிலிருந்து $\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta^2}\right),\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)$ இனை மூலகங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டைப் பெறுக.

8.0 இருபடிச் சமன்பாடுகள் பொது மூலத்தைக் கொண்டிருத்தல்

$ax^2-bx+c=0, px^2+qx+r=0$ எனும் சமன்பாடுகள் பொது மூலம் α இனைக் கொண்டிருப்பின்

$a\alpha^2-b\alpha+c=0$

$p\alpha^2-q\alpha+r=0$ ஆகும்

$\frac{\alpha^2}{br-cq}=\frac{-\alpha}{ar-pc}=\frac{1}{aq-bp}$ இதிலிருந்து α^2 , α இனைக் கணித்து குணகங்களுக்கிடையேயான தொடர்பினைப் பெறலாம்.

8.1 $x^2-px+q=0, x^2+mx+k=0$ என்பனவற்றின் பொது மூலம் α ஆகும்

1. α, α^2 இல் இரண்டு ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் எழுதுக.
2. இவ் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் தீர்ப்பதன் மூலம் α, α^2 இனைக் காண்க
3. இதிலிருந்து $(q-k)^2=(m-p)(pk-mq)$ என நிறுவுக.

8.2 $x^2-kx-6k=0, x^2-2x-k=0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளிற்கும் ஒரு பொது மூலம் உண்டெனில் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க

8.3 $x^2-ax-bc=0, x^2-bx-ca=0, (a\neq b)$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது மூலம் இருப்பின் மற்றைய மூலங்கள் $x^2-cx-ac=0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுக.

8.4 $ax^2+a^2x+=0, bx^2+b^2x+1=0$ ஆகியவற்றிற்கு ஒரு பொது மூலம் உண்டெனின் இவற்றின் மற்றைய மூலங்கள் $abx^2+x+a^2b^2=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் எனக் காட்டுக. $(a\neq b)$

8.5 $(x-1)^2 = a^2(x+a)$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

a யின் எப்பெறுமானங்களுக்கு மேற்படி சமன்பாட்டிற்கும் $(x-a)^2 = x(a-1)^2$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கும் பொது மூலம் இருக்குமெனக் காட்டுக.

09. மூலங்களுக்கு இடையே தொடர்பு இருப்பின் குணகங்களுக்கு இடையேயான தொடர்பு

பயிற்சி

9.1 $ax^2 + bx + c = 0$ இன் ஒரு மூலம் மற்றயதன் இருமடங்காகும்

1. ஒரு மூலம் α எனின் மற்றைய மூலம்
2. இரு மூலங்களின் கூட்டுத்தொகையை a, b சார்பில் பெறுக
3. இரு மூலங்களின் பெருக்கத்தை a, b சார்பில் பெற்று α வை இனங் காண்க
4. இதிலிருந்து $(n-1)^2 ac = nb^2$ எனக் காட்டுக

9.2 $x^2 - px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆகும்

1. $\alpha+\beta, \alpha\beta$ இனை ிஇங சார்பில் எழுதுக.
2. மூலகங்களுக்கு இடையோயான வித்தியாசம் 2 எனின் $(\alpha-\beta)$ இன் பெறுமானத்தினை எழுதி $(\alpha-\beta)^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க
3. இதிலிருந்து $p^2 = 4(q+1)$ எனக் காட்டுக

9.3 $4x^2 + 30x + k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 5 ஆல் விதிதியாசப்படுபவையாக அமைவதற்கு ம இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

9.4 $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் $a^1x^2 + b^1x + c^1 = 0$ இன் மூலங்களின் நிகர்மாறு எனின் $ab^1 = bc^1$ எனவும் $aa^1 = cc^1$ எனவும் காட்டுக

9.5 $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் $bx^2 + cx + a = 0$ இன் மூலங்களின் மூன்று மடங்கு எனின் a,b,c இற்கிடையே தொடர்பொன்றைக் காண்க. $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் m:n என்ற விகிதத்தில் இருப்பின் $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}$ எனக் காட்டுக

10. இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மை

10.1 $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2} - 4ac}{2a}$$ ஆகும்

$\Delta = b^2 - 4ac$ ஆனது மூலங்களின் தன்மையை வெளிக்கொணர்வதால் இது தன்மை காட்டி / பிரித்துக் காட்டி எனப்படும்.

10.2 $\Delta > O$ ஆகவும் நிறைவர்க்கமாகவும் இருப்பின் $ax^2 + bx + c = 0$ இங்கு இரு வேறுவேறான விகிதமுறும் மெய் மூலங்கள் பெறப்படும்.

பயிற்சி 10.2.1

10.3 $\Delta > O$ ஆகவும் நிறைவர்கம் அல்லாமலும் இருப்பின் $ax^2 + bx + c = 0$ இற்கு இரு வேறுவேறான விகிதமுறா மெய்மூலங்கள் பெறப்படும்

பயிற்சி 10.3.1

10.4 $\Delta = 0$ எனின் $ax^2 + bx + c = 0$ இற்கு இரு பொருந்தும் மெய் மூலங்கள் பெறப்படும்

பயிற்சி

10.4.1 $x^2 - px + p = 0$ எனும் சமன்பாடு பொருந்தும் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு p இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

10.4.2 $x^2 - (4 + k)x + 9 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு செப்பமாக ஒரு மூலத்தைக் கொண்டிருக்க k இனைக் காண்க.

10.4.3 $x^2 + 2x + 9 = k$ ஆனது x இற்குச் செப்பமாக ஒரு மெய் மூலத்தைக் கொண்டிருக்குமாறு ஒரு மெய்மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

10.4.4 $(7p+c)x^2+(5p-1)x+p=1$ என்னும் சமன்பாடு சமமான மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் p யின் பெறுமானங்களைக் காண்க

10.5 ஒரு இருபடிச்சமன்பாடு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு வேண்டியதும் போதியதுமான நிபந்தனை $\Delta \geqslant 0$ ஆகும்

ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலம் உண்டெனக் காட்டுவதற்கு $\Delta \geqslant 0$ எனக் காட்டுதல் வேண்டும்.

பயிற்சி

10.5.1

10.6 ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டிநற்கு மெய்மூலம் இருப்பின் $\Delta \geqslant 0$ எனக் கொள்ளப்பட்டு பெறுமான வீச்சுக்கள் காணப்படலாம்.

பயிற்சி

10.6.1

10.7 Δ<O எனின் $ax^2+bx+c=0$ இற்கு கற்பனை மூலங்கள் பெறப்படும்.

பயிற்சி

10.7.1

11. இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எடுக்கும் குறி

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α , β எனின்

* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ஆயிருப்பதற்கு வேண்டியதும் போதியதுமான நிபந்தனை

$\Delta \geqslant 0$ உம் $\alpha +\ \beta > 0$ உம் $\alpha\beta > 0$ ஆகும்

$-b/a >$ உம் $c/a > 0$

* $\alpha > 0$, $\beta < 0$ ஆயிருப்பதற்கு வேண்டியதும் போதியதுமான நிபந்தனை $\Delta \geqslant 0$ உம் $\alpha\beta < 0$ உம் ஆகும்

* $\alpha < 0$, $\beta < 0$ ஆயிருப்பதற்கு வேண்டியதும் போதியதுமான நிபந்தனை

$\Delta \geqslant 0$ உம் $\alpha + \beta < 0$ உம் ஆகும்

குறிப்பு

01. இரு மூலங்களும் குறியுடையனவாக இருப்பதற்கு வேண்டியதும் போதியதுமான நிபந்தனை.

$\Delta \geqslant 0$ உம் $\alpha\beta > 0$ உம் ஆகும்

02. $\alpha > 1, \beta > 1$ ஆயிருப்பதற்கு வேண்டியதும் போதியதுமான நிபந்தனை

$(\alpha - 1) > 0$ உம் $(\beta - 1) > 0$

$(\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0$ உம் $(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$ உம் ஆகும்

பயிற்சி

11.1

பலவினப் பயிற்சிகள்

01. α, β என்பன சமன்பாடு $x^2 - px + q = 0$ இன் மூலங்களாகும். $\alpha(\alpha+\beta), \beta(\alpha+\beta)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(August 2000)

02. α, β என்பன சமன்பாடு $x^2 + px + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் எனவும் γ, δ என்பன சமன்பாடு $x^2 + \frac{1}{p}x + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் எனவும் கொள்வோம்.

$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta) = (\gamma^2 + \rho\gamma + 1)(\delta^2 + \rho\delta + 1)$ எனக் காட்டி

$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta) = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2$ என்பதை உய்த்தறிக.

(August 2001)

03. $f(x) = x^2 + 2x + 9; x\Re$ எனக் கொள்வோம்.

1. α, β என்பன $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் எனின் , $\alpha^2 - 1, \beta^2 - 1$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பெறுக.
2. சமன்பாடு $f(x) = k$ ஆனது x இற்குச் செப்பமான ஒரு மெய் மூலத்தை கொண்டிருக்குமாறு ஒரு மெய் மாறிலி k யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.
3. $\frac{1}{f(x)}$ இன் அதியுயர் பெறுமானத்தைக் கண்டு, அது அடையப்படும் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

4. சமன்பாடு $f(x)=\lambda x$ ஆனது x இற்கு மெய்த் தீர்வைக் கொண்டிராத ஒரு மெயம் மாறிலி λவின் பெறுமானத் தொடையை துணிக.

(April 2002)

04. $\lambda \in \Re$ எனவும் $P(x)=x^2-2\lambda(x-1)-1$ கொள்வோம். $P(x)=0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக் காட்டுக. $P(x)=0$ இன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை அம் மூலகங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாக இருக்குமாறு λ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

05. $f(x)=x^2+bx+c$ எனவும் $g(x)=x^2+qx+r$ எனவும் கொள்வோம். இங்கே $b,c,q,r,\in\Re$ உம் $c\neq 0$ உம் ஆகும். α, β என்பன $g(x)=0$ இன் மூலங்கள் எனக் கொள்வோம். $f(\alpha)f(\beta)=(c-r)^2-(b-q)(cq-br)$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $f(x)=0$ உம் ஒரு பொது மூலத்தைக் கொண்டிருப்பின் , அப்போது $b-q, c-r, cq-br$ ஆகியன பெருக்கல் விருத்தியில் இருக்குமென நிறுவுக.
α, γ ஆகியன $f(x)=0$ இன் மூலங்களெனின், β,γ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு $x^2-\frac{(c+r)(q-b)}{c-r}x+\frac{cr(q-b)^2}{(c-r)^2}=0$ எனக் காட்டுக.

(April 2005)

06. இருபடிச் சமன்பாடு $px^2-qx+r=0$ ஆனது பொருந்தும் மூலகங்களைக் கொண்டிருப்தற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்க. இங்கு P,Q,R ஆகியன மெய்யெண்கள்.
a,b,c ஆகியன மெய்யெண்களாகவும் இருபடிச்சமன்பாடு $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ ஆனது பொருந்தும். மூலகங்களைக் கொண்டும் இருக்குமெனின் அப்போது $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{2}{b}$ எனக் காட்டுக.

(April 2006)

07. α, β என்பன சமன்பாடு $x^2-bx+c=0$ இன் மூலகங்களாகும். α^3,β^3 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b,c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.
இதிலிருந்து $\alpha^3+\frac{1}{\beta^3},\beta^3+\frac{1}{\alpha^3}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b,c ஆகியவற்றின் சார்பில் தருக.

08. சமன்பாடு $x^2-bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும் இங்கு $c\neq 0$ α^4,β^4 ஐ மூலகங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b,c ஆகியவற்றின் சார்பில் தருக.
இதிலிருந்து $\frac{\alpha^4}{\beta^4}+L,\frac{\beta^4}{\alpha^4}+L$ ஐ மூலகங்களாக கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b,c ஆகியவற்றின் சார்பில் தருக.

09. . α, β என்பன சமன்பாடு $x^2 - bx + c = 0$ இன் மூலகங்களாகும் இங்கு $c \neq 0$ $\alpha^3, \beta^2, \alpha^2\beta^3$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b,c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க. இதிலிருந்து $\alpha^3\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^3}, \alpha^2\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3\beta^2}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை டிஇஉ ஆகியவற்றின் சார்பில் தருக

10. $px^2 + qx + r = 0(p, q, r, \in \Re, p \neq 0)$ என்பது மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைப் பெறுக.
$a, b, c \in \Re$ ஆக $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ இன் மூலங்கள் எப்பொழுதும் மெய்யானவை எனக் காட்டுக.

மூலங்கள் சமனாக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனைகளைக் காண்க.
சமமான மூலத்தின் பெறுமானம் யாது.

11. $ax^2 - bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β உம் $px^2 - qx + r = 0$ இன் மூலங்கள் γ, δ உம் ஆகும். Δ_1, Δ_2 என்பன மேலே தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் பிரித்துக் காட்டிகள் ஆகும். α, β, γ, δ என்பன இந்த ஒழுங்கில் ஒரு கூட்டல் விருத்தியாகவும் அமைகின்றன. $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{a^2}{p^2}$ எனக் காட்டுக.

12. x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களிற்கு $\frac{x^2 - bc}{2x - b - c}$ என்பது டி க்கும் உ க்கும் இடையில் எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கமாட்டாது எனக் காட்டுக. இங்கு $b \neq c$ ஆகும் .
$\frac{x^2 - bc}{2x - b - c} = \frac{b + c}{2}$ இன் தீர்வுகள் α, β எனின் $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{b + c}{b^2 + c^2}$ என நிறுவுக.

13. இருபடிச்சமன்பாடு $px^2 + qx + r = 0$ ஆனது மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. இங்கு p,q,r ஆகியன மெய்எண்கள்.
a,b,c ஆகியன கூட்டல் விருத்தியிலும்
$(b-c)x^2(c-a)x + (a-b) = 0, 2(c-a)x^2 + (b+c)x = 0$ ஆகியன பொது மூலத்தைக் கொண்டும் இருப்பின்,
01. $2a + b + 3c = 0$ எனவும்
02. $a^{2,}c^2, b^2$ ஆகியன கூட்டல் விருத்தியில் உள்ளன எனவும் காட்டுக.

14. $(\tan\theta - \tan\alpha)(\tan\theta - \tan\beta) = 0\tan\gamma$ எனின் tanθ விற்கு இரு வேறு வேறான தீர்வுகள் உண்டு எனக் காட்டுக. இங்கு $O\angle\gamma\angle\pi/2$ ஆகும். $\tan\theta_1, \tan\theta_2$ என்பன

இதன் தீர்வுகள் எனின் $\tan\gamma = \dfrac{[Cot(\theta_1+\theta_2) - Cot(\alpha+\beta)\ ][Cot\alpha + Cot\beta\ ]}{Cot\alpha Cot\beta}$ எனக் காட்டுக.

15. $f_1(x) = x^2 + ax + b$

$f_2(x) = x^2 + lx + m$ என்க

α, β என்பன $f_1(x) = 0$ இன் மூலங்களும் γ, δ என்பன $f_2(x) = 0$ இன் மூலங்களும் எனின் $f_1(\gamma)f_1(\delta) = f_2(\alpha)f_2(\beta) = (b-m)^2 + (a-l)(am-bl)$ எனக் காட்டுக

2 இருபடிச் சார்புகள்

01. இருபடிக் கோவையின் பொதுவடிவத்தை அறிவர்

02. $ax^2 - bx + c$ எனும் இருபடிக்கோவையை $a\{(x+p)^2 + q\ \}$ எனும் வடிவில் பெறுவர் p,q,r வரைபினை காட்டுவர்

03. a>o ஆகவும் $b^2 - 4ac\langle 0$ ஆகவும் இருப்பின் இருபடிக் கோவை எடுக்கும் குறியை எழுதுவர்.

04. a<o ஆகவும் $b^2 - 4ac\langle 0$ ஆகவும் இருப்பின் இருபடிக் கோவை எடுக்கும் குறியை எழுதுவர்.

05. 01. a>o ஆகவும் $b^2 - 4ac\langle 0$ ஆகவும் இருப்பின் இருபடிக் கோவை எடுக்கும் குறியை எழுதுவர்.

02. a<o ஆகவும் $b^2 - 4ac\langle 0$ ஆகவும் இருப்பின் இருபடிக் கோவை எடுக்கும் குறியை எழுதுவர்.

06. 01. a>o ஆகவும் $b^2 - 4ac = 0$ ஆகவும் இருப்பின் இருபடிக் கோவை எடுக்கும் குறியை எழுதுவர்.

02. a<o ஆகவும் $b^2 - 4ac = 0$ ஆகவும் இருப்பின் இருபடிக் கோவை எடுக்கும் குறியை எழுதுவர்.

07. $y = ax^2 + bx + c$ இன் ஆறு வகையான வரைபுகளை வரைவர்.

08. ஓர் இருபடிச் சார்பு ஒ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களினதும் சார்பு எடுக்கும் பெறுமானத்தைக் காண்பர்.

09. ஒ இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களிற்கும் சார்பும் எல்லாப் பெறுமானங்களையும் மாறிலி எடுக்கும் பெறுமான வீச்சைக் கணிப்பர்.

10. ஒஇல இல் உள்ள இருபடிக்கோவைகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பர்.

11. ய >0 ஆகவும் $b^2 - 4ac\langle 0$ ஆகவும் இருப்பின் ஒ இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் இருபடிக் கோவை எடுக்கும் குறி

$y \ = ax^2 + bx + c$ என்க

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2x}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right.$$

x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ஆயின்

$b^2-4ac\langle o$ x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் $\left[\left(x+\frac{b}{2x}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0\right.$

ஆகவே a>0 $b^2-4ac\langle o$ இருப்பின் ஒ இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் $ax^2+ax+1>0$

குறிப்பு :- 1. a,0 ஆகவும் $b^2-4ac<o$ ஆகவும் $ax^2+bx+c>0$ ஆகவும் இருப்பின் ஒ எல்லா பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்.

2. ய,0 ஆகவும் ஒ இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானத்தினதும் $ax^2+bx+c>0$ ஆகவும் இருப்பின் $b^2-4ac<o$ ஆகும்.

3. ஒ இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் $ax^2+bx+c>0$ ஆகவும் $b^2-4ac<o$ ஆகவும் இருப்பின் ய,0 ஆகும்.

பயிற்சி

3.1. $f(x)=9+2(k+4)x+2kx^2(x\neq 0)$ என்க

1. $f(x)$ இன் தன்மை காட்டியை எழுதுக
2. ஒ இன் எல்லா மெய்பெறுமானத்திற்கும் $f(x)$ நேராக இருக்குமாறுள்ள நிபந்ததனைகளை எழுதுக.
3. ஒ இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானத்திற்கும் $f(x)$ நேராதவாறு ம இன் பெறுமான வீச்சினைக் காண்க.

3.1.2 $p(x)=(\lambda-2)x^2-3(\lambda+2)x+6\lambda$ இங்கு $\in\Re$ என்க எல்லா $x\in\Re$ இற்கும˙ $p(n)$ நேராக இருக்குமாறு λ இன் மிகக் குறைந்த நிறையெண் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3.1.3 எல்லா மெய் x இற்கும் $2x^2+4x-22+m$