1. சிக்கலெண்கள்

01. கற்பனை எண்களை அறிதல்

02. சிக்கல் எண்களை அறிதல்

03. சிக்கல் எண்களின் இயல்புகளை அறிதல்

04. உடன் புணர்ச்சிக்கலெண்களின் இயல்புகளை அறிதல்

05. ஆகன் வரிப்படத்தை விளங்கிக் கொள்வர்

06. முனைவு வடிவில் சிக்கலெண்களின் பெருக்கம், வகுத்தல்

07. ஒழுக்குகள்

1.1 கற்பனை எண்கள்

மறை எண் ஒன்றின் வர்க்க மூலம் கற்பனை எண் ஆகும்.

உ + ம்:- $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}$ என்பன கற்பனை எண்கள் $\sqrt{-1} = i$ எனக் குறிக்கப்படும்

குறிப்பு: 1) மறை எண்களின் இரட்டை மூலங்கள் கற்பனை எண்களாகும்.

2)
$$\sqrt{-1} = i \to -1 = i^2$$
$$-i = i^3$$
$$(-1)^2 = i^4 \Rightarrow i^4 = 1$$

3)
$$l^{4r} = 1$$
$$i^{4r+1} = i$$
$$i^{4r+2} = i^2 = -1$$
$$i^{4r+3} = -2$$
$$i^{4r+4} = i^{4(r+1)} = (i^4)^{r+1} = 1$$

4)
$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$
$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$$

உ + ம்

1) $i^{300} = (i^4)^{75} = i^{75} = 1$

2) $i^{301} = i^{300}.i = i = i$

பயிற்சி:

$i^{270}, i^{410}, i^{273}, i^{375}$ என்பவற்றைக் கணிக்க $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i^{27}}$

1.2 சிக்கலெண்கள்

a, b என்பன மெய் எண்களாக இருக்க a + bi என்ற வடிவிலுள்ள எண்கள் சிக்கலெண்கள் எனப்படும். இது Z ஆல் குறிக்கப்படும்.

$Z = a + ib$ என எழுதப்படும்

1.21 சிக்கலெண்ணின் மெய்பகுதியும் கற்பனைப்பகுதியும் $Z = a + ib$ எனின்

a = Z மெய்பகுதி எனப்படும்

a = Re (Z) என எழுதப்படும் (Read Partofz)

b = Z கற்பனைப்பகுதி எனப்படும்

b = Im (Z) என எழுதப்படும் (Imaginary Partofz)

உ + ம்: (01) Z = 2 + 3i எனின்

Re (Z) = 3 & Im (Z) = 3

(02) Z = 1 – 4i எனின்

Re (Z) = 1 & Im (Z) = -4

பயிற்சி: பின்வரும் சிக்கல் எண்களின் மெய்ப்பகுதிகள், கற்பனைப்பகுதிகளை காண்க.

1. -3 + 2i
2. -4 - i
3. $\sqrt{2} + 3i$
4. $1 + \sqrt{3}i$
5. $(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$

1.3 சிக்கலெண்களின் இயல்புகள்

1.31 அற மெய் எண் $Z = a + ib$ இல் b = 0 எனின்

Z அற மெய் எண் எனப்படும் (தூய மெய் எண்)

1.32 அறக்கற்பனை எண் (தூய கற்பனை எண்)

$Z = a + ib$ இல் a = 0 எனின் Z ஆனது அறக்கற்பனை எண் அல்லது தூய கற்பனை எண் எனப்படும்

1.33 இருசிக்கல் எண்களின் கூட்டல்

$Z_1 = a + ib, Z_2 = c + ib,$ எனின்

$$Z_1 + Z_2 = (a + ib) - (c + id)$$
$$= (a + c) + (b + d)i$$

1.34 சிக்கலெண்களின் கழித்தல்

$$Z_1 - Z_2 = (a + ib) - (c + id)$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

1.35 சிக்கலெண்ணை எண் ஒன்றால் பெருக்கல்

$Z_1 = a + ib$ $\quad \lambda$ எண் எனின்

$$\lambda Z_1 = \lambda(a + ib)$$
$$= \lambda a + i\lambda b$$

1.36 $Z = a + ib$ எனின் (-Z) ஐக் காணல்

$$-Z = -(a + ib)$$
$$= -a - ib$$ ஆகும்

1.37 $Z_1 = a + ib, \quad Z_2 = c + id$ என்க

$Z_1 = Z_2$ எனின்

$$a + ib = c + id$$

$\Rightarrow a + ib - (c + id)50$

$$(a - c) + i(b - d) = 0$$

$\Rightarrow a - c = 0 \,\&\, b - d \quad 50$

$\Rightarrow a = c \,\&\, b = d$

❋ இரு சிக்கல் எண்கள் சமனாயின் அவற்றின் மெய்ப்பகுதிகள் சமனாகவும் கற்பனைப்பகுதிகள் சமனாகவும் இருக்கும்

1.38 சிக்கல் எண் ஒன்றின் மட்டு

$Z = a + ib$ என்க

Z இன் மட்டு ஆனது $\sqrt{a^2 + b^2}$ என வரையறுக்கப்படும்

இது $|Z|$ எனக்குறிக்கப்படும்

அது $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ஆகும்

❋ $|Z| \geq 0$ ஆகும்

1.39 சிக்கலெண்களின் பெருக்கல்

$Z_1 = a + ib, Z_2 = c + id$ என்க

$$Z_1 Z_2 = (a+ib)(c+id)$$
$$= a(c+id) + ib(c+id)$$
$$= ac + iad + ibc + i^2 bd$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

❋ சிக்கல் எண்களின் கூட்டல், பெருக்கல் என்பன பரிவர்த்தனை விதி, பரம்பல் விதி, தொகும்பு விதி என்பவற்றுக்கு அமையும்

1.310 சிக்கலெண் ஒன்றின் உடன் புணரி

$Z_1 = a + ib$ எனின் Z இன் உடன் புணரி a-ib என வரையறுக்கப்படும். இது Z ஆல் குறிக்கப்படும்.

Z = a – ib அது

$$\overline{Z} = (a+ib)(a-ib)$$

❋
$$= a^2 + b^2$$
$$= |z|^2$$

$$\overline{Z} = |z|^2$$

❋ ஒரு சிக்கலெண்ணினதும் அதன் உடற்புணரியினதும் பெருக்கம் மெய் எண் ஆகும்.

1.311 சிக்கலெண்ணின் வகுத்தல்

$Z_1 = a+ib, Z_2 = c+id$ எனின்

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)}$$

$$= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

உ + ம்: $Z_1 = 2+3i, Z_2 = 1-i$ எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க

01. $Z_1 + Z_2$ 02. $Z_1 - Z_2$ 03. $|Z_1|$ 04. $|Z_1 + Z_2|$ 05. $Z_1 \cdot Z_2$

06. $\frac{Z_1}{Z_2}$ 07. $\frac{1}{Z_2}$ 08. $\overline{Z_1}$ 09. $Z_1\overline{Z_2}$

01. $$Z_1 + Z_2 = (2+3i)+(1-i) \\ = 3+2i$$

02. $$Z_1 - Z_2 = (2+3i)-(1-i) \\ = 1+4i$$

03. $|Z_1| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

04. $$|Z_1 + Z_2| = |3+2i| \\ = \sqrt{3^2+2^2} \\ = \sqrt{13}$$

05.
$$
\begin{aligned}
Z_1 \cdot Z_2 &= (2+3i)(1-i) \\
&= (2+3) + (3-2)i \\
&= 5 + i
\end{aligned}
$$

06.
$$
\begin{aligned}
\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{2+3i}{1-i} \\
&= \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{-1+5i}{2}
\end{aligned}
$$

07.
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z_2} &= \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{1}{2}(1+i) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

08. $\overline{Z_1} = 1 + i$

09.
$$
\begin{aligned}
Z_1 \overline{Z}_1 &= (1-2)(1+i) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

பயிற்சி:

01. $Z_1 = 1-2i$, $Z_2 = 2 - I$ எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க

1) $Z_1 + Z_2$ 2) $Z_1 - Z_2$ 3) $|Z_1 - Z_2|$ 4) $\overline{Z_2}$

5) $Z_1\overline{Z_1}$ 6) $\frac{1}{Z_2}$ 7) $\frac{1}{Z_1 - Z_2}$ 8) $Z_1 \cdot Z_2$

9) $\frac{Z_1}{Z_2}$

02. $Z_1 = \sqrt{3} - i \quad Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க

1) $Z_1 + Z_2$ 2) $Z_1 - Z_2$ 3) $Z_1 \ Z_2$ 4) $\frac{Z_2}{Z_1}$

5) $Z_1\overline{Z_1}$ 6) $(Z_1 + Z_2)\overline{(Z_1 Z_2)}$ 7) $\frac{1}{\overline{Z_2 - Z_1}}$

03. $Z = 3 - 2\ I$ எனின்

1) Z^2 2) Z^3 3) $\frac{1}{Z}$ 4) $\overline{Z_2}$ என்பவற்றைக் காண்க

04. $\frac{Z-i}{Z+i} = i$ எனின் Z ஐக் காண்க

05. $\sqrt{8+bi}$ ஐக் காண்க

06. $\frac{Z-i}{Z-i} = 1+i$ எனின் Z ஐக் காண்க

07. $(1+i)^6(1+\frac{1}{2})^6$ ஐச் சுருக்க

08. $\frac{i}{1-2} + \frac{1+i}{1+2i} + \frac{2+i}{1+i}$ சுருக்க

09. இல் Z க் காண்க

10. $\sqrt{\dfrac{1+i}{1-2}}$ ஐக்கணிக்க

1.4 உடன்புணர்ச்சிக்கலெண் இயல்புகள்

1.41 $Z_1 = a + ib$ $Z_2 = c + id$ எனின்

$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ ஆகும்.

நிறுவல் :

$$Z_1 = a + ib, \quad Z_2 = c + id$$
$$Z_1 + Z_2 = (a+c) + i(b+d)$$
$$\overline{Z_1 + Z_2} = (a+c) - i(b+d)$$
$$\overline{Z_1} = a - ib$$
$$\overline{Z_2} = c - id$$
$$\ni \overline{Z_1} + \overline{Z_2} = (a+c) + i(b+d)$$
$$R_1 + R_2 \Rightarrow \overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

✵ $Z_1 + Z_2 + Z_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Z_2 = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{Z_n}$

1.42 $\overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$ ஆகும்

நிறுவல்

$$Z_1 = a + ib,$$
$$Z_2 = c + id$$
$$Z_1 - Z_2 = (a-c) + i(b-d)$$
$$\overline{Z_1 - Z_2} = (a-c) + i(b-d)$$
$$\overline{Z_1} - \overline{Z_2} = (a-ib) - (c-id)$$
$$= (a-c) - i(b-d)$$
$$R_1 + R_2 \Rightarrow \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$$

1.43 $\overline{Z_1\, Z_2} = \overline{Z_1}\, \overline{Z_2}$ ஆகும்

1.44

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$

$$= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(01)$$

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{ac+ib}{c-id}$$

$$= \frac{(a-ib)(c+id)}{(c-id)(c+id)}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i\frac{C9bc-ad)}{c^2+d^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(02)$$

$$(01) = (02) \Rightarrow \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$ ஆகும்

❋ $\overline{Z_1\, Z_2\, Z_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z_n} = \overline{Z_1}\; \overline{Z_2}\; \overline{Z_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \overline{Z_n}$

❋ $(\overline{Z^{-1}}) = \overline{(Z)}^{-1}$ ❋ $(\overline{Z^n}) = \overline{(Z)}^u$ ❋ $Z - \overline{Z}_1 = 2Iu(Z)$

❋ $\overline{(Z_1\, Z_2)} = \overline{Z_1}\; Z_2$ ❋ $Z + \overline{Z} = 2\operatorname{Re}(Z)$

1.5 ஆகன் வரிப்படம்

வழமையான ஆள் கூற்றுத்தளத்தில் அச்சை மெய் அச்சாகவும் அச்சை கற்பனை அச்சாகவும் கொண்டு ஒரு சிக்கலெண்ணை புள்ளியொன்றால் கேத்திரகணித ரீதியாக வகைக்குறிக்கலாம் இவ்வரிப்படம் ஆகன் வரிப்படம் எனப்படும.

உ + ம் : என்ற சிக்கல் எண்ணை (2, 4) என்ற ஆள் கூறுகளையுடைய புள்ளியால் வகைக் குறிக்கலாம்

1.51 சிக்கல் எண் ஒன்றின் மட்டும், வீச்சமும்

$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

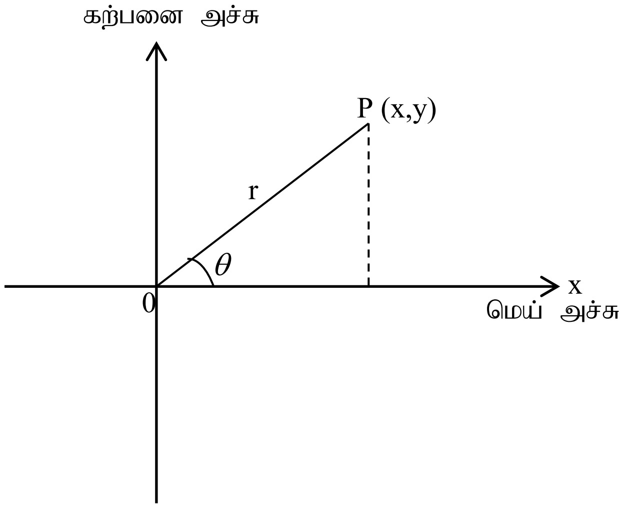
$r = 1 \neq 1$

$P\hat{O}X = \theta$

$Z = x + iy$ தெக்காட்டு வடிவம்

$= r(\frac{x}{r} + \frac{iy}{r})$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ முனைவு வடிவம்



இங்கு θ என்பது Z ன் வீச்சம் எனப்படும்

இது θ = arg (z) என எழுதப்படும்

$\theta = 2n\pi + \alpha$ என எழுதமுடியும் $-\pi < \alpha \leq \pi$ ஆகும்

$\therefore \quad Z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ எனப்பெறப்படும்

இங்கு α ஆனது Z இன் தரைமை வீச்சம் எனப்படும்

உ + ம்: 01. Z=1+I இன் மட்டு வீச்சம் யாது

$1Z1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$Z = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$1Z1 = \sqrt{2}, \arg(Z) = \frac{\pi}{4}$

02. Z=-1+I இன் மட்டு வீச்சு யாது

$= \sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$= \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$1Z1 = \sqrt{2}, \arg(Z) = \frac{3\pi}{4}$

பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றின் மட்டு, வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க

1. $\sqrt{3}-i$ 2. $-2i$ 3. $1-\sqrt{3}i$ 4. $2+2i$ 5. $-1-i$

1.6 இரு சிக்கலெண்களின் முனைவு வடிவப் பெருக்கம்

$Z_1 = r_1(Cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$Z_1Z_2 = r_1r_2(Cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(Cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

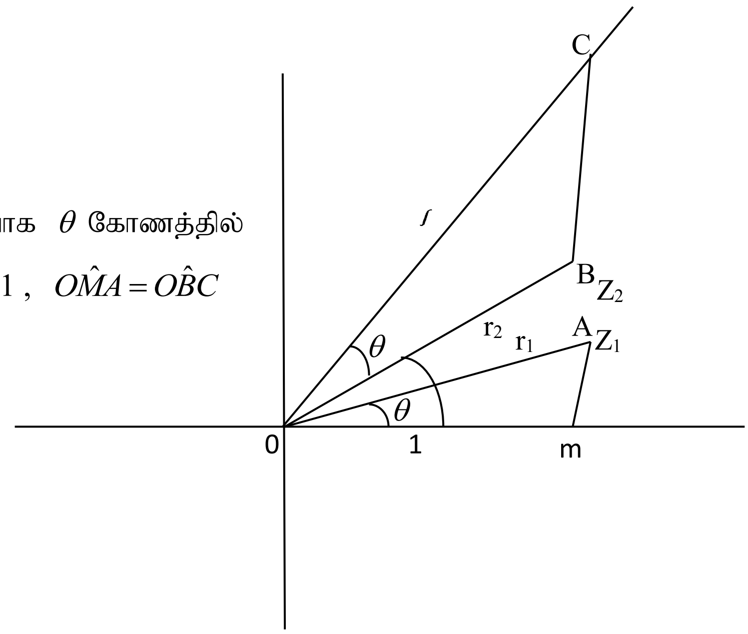
$$= r_1r_2[Cos\overline{\theta_1+\theta_2} + i\sin\overline{\theta_1+\theta_2}]$$

$$|Z_1, Z_2| = r_1r_2$$

$$= |Z_1||Z_2|$$

$$\arg(Z_1, Z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

$$= \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$$



அமைப்பு: OB யுடன் இடஞ்சுழியாக θ கோணத்தில் l என்ற கோட்டை வரைக Om=1 , $O\hat{M}A = O\hat{B}C$ ஆகுமாறு ஐக் குறிக்க

நிறுவல்: $\therefore$ $\triangle$OBC /// OMA

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OM}$$

$$OC = OA.OB$$

$$= r_1\ r_2$$

$$= |Z_1Z_2|$$

$$M\hat{O}C = \theta_1 + \theta_2$$

$$= \arg(Z_1Z_2)$$

$\therefore$ C என்ற புள்ளி Z_1Z_2 ஐக் குறிக்கும்

1.7 இரு சிக்கலெண்களின் வகுத்தல்

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(Cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(Cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[Cos\overline{\theta_1-\theta_2} + i\sin\overline{\theta_1-\theta_2}]$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$\arg\left[\frac{Z_1}{Z_2}\right] = \theta_1 - \theta_2$

$\arg(Z_1) - \arg(Z_2)$

$\arg(Z_1, Z_2, Z_3, ...Z_n) = \arg(z_1) + \arg(Z_2) + ... + \arg(Z_n)$

$\arg(Z) = +/1\frac{\pi}{2}$ எனின் Z தூய கற்பனை எண்

$\arg(Z) = 0$ or π எனின் Z தூய மெய்யெண்

பயிற்சி :

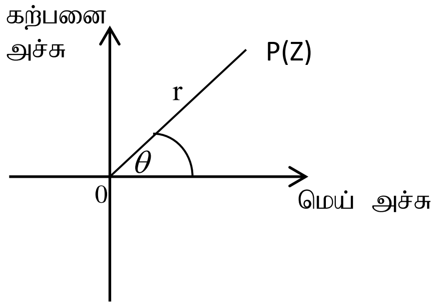
01. Z_1, Z_2 தரப்படின் பின்வரும் சிக்கலெண்கள் குறிக்கும் புள்ளியை அகன் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக

1. $Z_1 + Z_2$
2. $\frac{Z_1}{Z_2}$
3. $\frac{1}{Z_1}$
4. $\overline{Z_1}$

02. பின்வருவனவற்றை முனைவு வடிவில் கூறி மட்டையும் வீச்சையும் காண்க.

1. $1 + Cos\theta + \sin\theta$
2. $Cos\theta + i\sin\theta$
3. $\frac{1 + \sin\theta + \text{i}\cos\theta}{1 + \sin\theta - \text{i}\sin\theta}$
4. $(3 - 4i)(1 - 7i)$
5. $\frac{3 - 2\text{i}}{2 + 3\text{i}}$

(Argand Diagram) ஆகண் வரிப்படம்

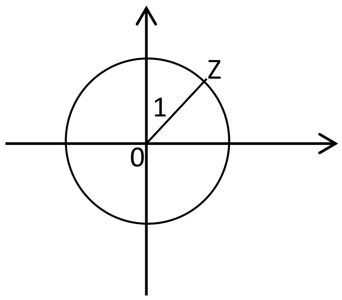


$|Z| = OP = r$

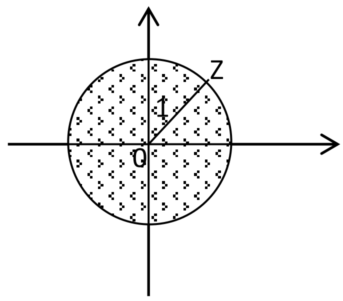
$\arg(Z) = \theta$

ஒழுக்கு (Loci)

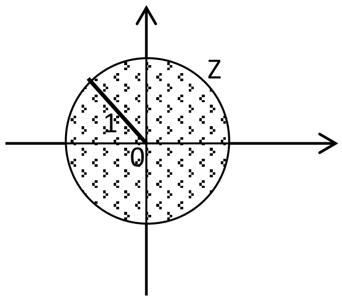
$|Z| = 1$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



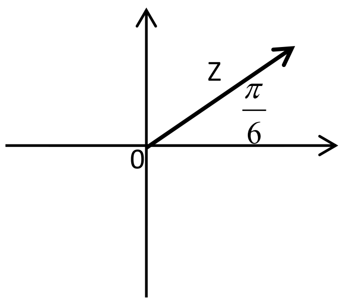
$\left|Z\right| \leq -11$ எனின் Zஇன் ஒழுக்கு



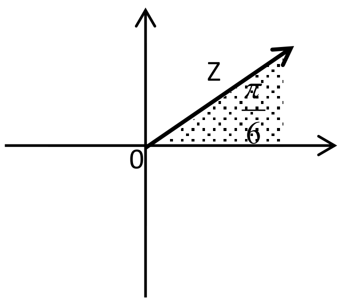
$|Z| < 1$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



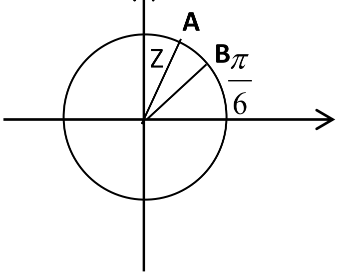
$\arg(Z) = \frac{\pi}{\varepsilon}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



$0 \leq \arg(Z) \leq \frac{\pi}{6}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு

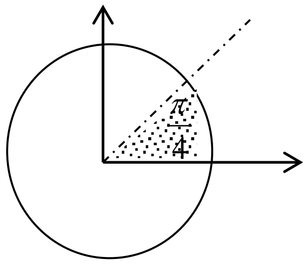


$\left|Z\right| = 2$ ஆகவும் $\frac{\pi}{6} \leq \arg(Z) \leq \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருப்பின் ணு இன் ஒழுக்கு



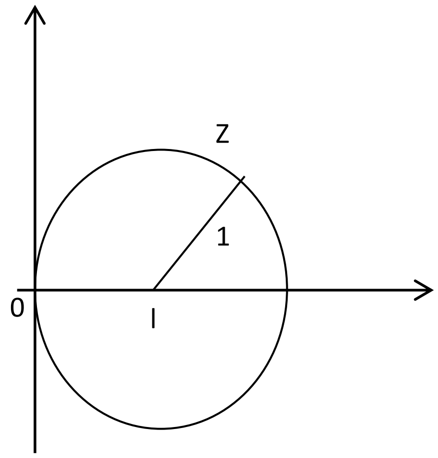
இன் ஒழுக்கு AB என்ற வில்

$|Z| \le a + 0 \le \arg(Z) < \frac{\pi}{4}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு யாது?



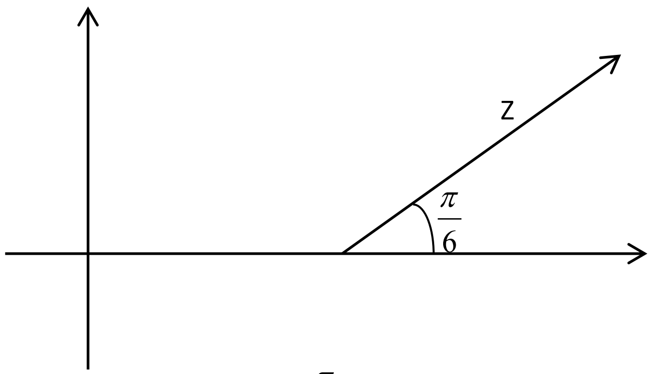
Z இன் ஒழுக்கு நிழற்படுத்தியபகுதி ஆகும்

|Z-1|=1 எனின் Z இன் ஒழுக்கு

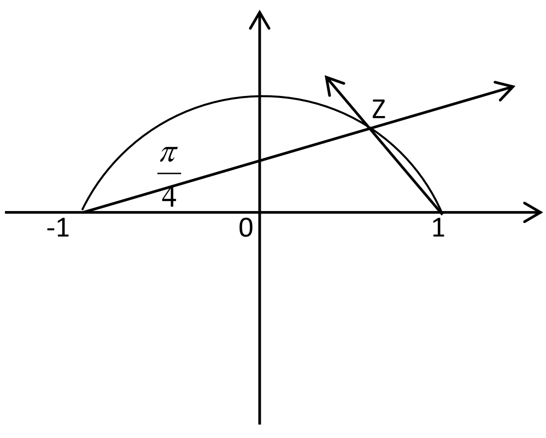


இன் ஒழுக்கு $(1, 0)$ ஐ மையமாகவும் 1 அலகு ஆரையாகவும் உடைய வட்டமாகும்

$\arg(Z-1) = \frac{\pi}{6}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு

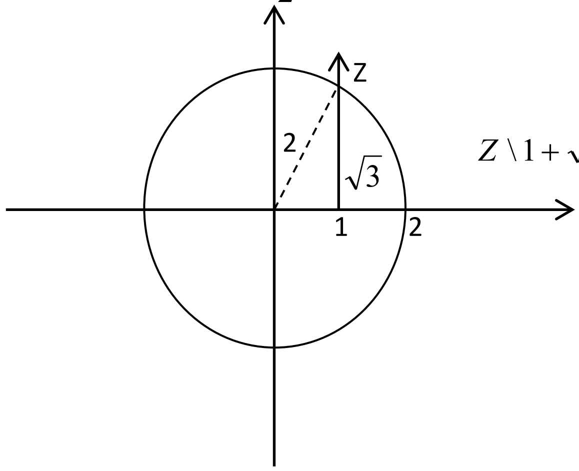


$\arg(Z-1) - \arg(Z+1) = \frac{\pi}{4}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு



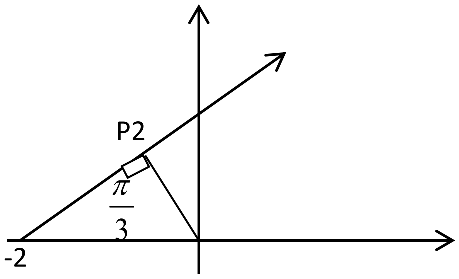
இன் ஒழுக்கு வட்டவில் ஆகும்

$|Z| = 2 + \arg(Z-1) = \frac{\pi}{2}$ எனின் Z ஐக் காண்க



$Z \setminus 1 + \sqrt{3}i$

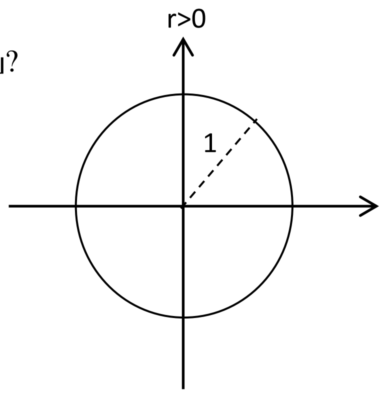
$\arg(Z-2) = \frac{\pi}{3}$ எனின் |Z| இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?



|Z| இழிவு $= \text{OP} = 2Sin\frac{\pi}{3}$

$= \sqrt{3}$

$\text{Re}(Z - \frac{1}{Z}) = 0$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு யாது?



$Z = r(Cos\theta + iSin\theta)$

$\overline{Z} = r(Cos\theta - iSin\theta)$

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r}(Cos\theta + iSin\theta)$

$\text{Re}(Z - \frac{1}{z}) = r\cos\theta - \frac{1}{r}Cos\theta = 0$

$= \text{Cos}\theta\,(\text{r} - \frac{1}{\text{r}}) = 0$

$= \text{Cos}\theta\,(\frac{r^2 - 1}{r}) = 0$

$r \neq 0 \Rightarrow Cos\theta\,(r^2 - r) = 0$

$\text{Cos}\theta = 0$ or $\text{r} = 1$

$\theta = +/- \frac{\pi}{2}$ or $|\text{Z}| = 1$

Some important Results

- ❋ $z\bar{z} = |z|^2$
- ❋ $z\bar{z}$ மெய்யானது
- ❋ $z + \bar{z}$ மெய்யானது
- ❋ z மெய் எனின் $\arg(Z) = 0$ or π and $\mathrm{Im}(Z) = 0$
- ❋ z கற்பனை எனின் $\arg(Z) = +/- \frac{\pi}{2}$ *and* $\mathrm{Re}(Z) = 0$

பின்வரும் ஒழுங்குகளை ஆகன் வரிப் படத்தில் குறித்து விபரிக்க

1. $|z| = 2$ 2. $|z| \le a$ 3. $|z| < 2$ 4. $1 \le |Z| < 2$

5. $|z-1| = 3$ 6. $|Z+1| = 2$ 7. $|Z-i| = 1$ 8. $|Z-1-2i| = 1$

9. $|Z+1+i| = 1$ 10. $|Z+2+i| = 2$ 11. $|Z+2-i| = |Z-3+2i|$

12. $\arg(Z) = \frac{\pi}{3}$ 13. $\arg(Z-1) = \frac{\pi}{6}$ 14. $\arg(Z-i) = \pi$ 15. $\arg(Z+i) = -\frac{\pi}{2}$

16. $\arg(Z-2+3i) = \frac{2\pi}{3}$ 17. $\arg(Z-1) - \arg(Z-i) = \frac{\pi}{4}$

18. $\mathrm{Re}\left[Z - \frac{1}{z}\right] = 0$ 19. $\arg(Z-4) - \arg(Z) = \frac{\pi}{3}$

20. $\arg(Z+2) = \arg(Z-2) - \frac{\pi}{6}$ 21. $\arg(Z-i) + \frac{\pi}{4} = \arg(Z+i)$

22. $\mathrm{Im}(Z)^2 = 0$ 23. $\mathrm{Im}(Z - 1 + \frac{4}{z}) = 0$ 24. $\mathrm{Re}(\frac{z-2}{z}) = 0$

25. $\mathrm{Re}(Z - \frac{1}{\bar{z}}) = 0$ 26. $O < \arg(Z+2+3i) \le \frac{\pi}{3}$

27. if $\arg(Z+3) = \frac{\pi}{3}$ find the least value of $|Z|$

28. if $|Z-3+3i| = 2$ find the greatest and least value of $|Z+1|$

29. $\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)^6$ find the value and shown that immaginary

30. $\frac{(-1+i)^3}{(1+i)^4}$ find the modulus and argument

$Z_1 = \frac{1+i}{1-i}, Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ Z_1, Z_2 ஐ ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்து Z_1+Z_2 அமைக்க $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-1}$ என உய்த்தறிக

பின்வருவனவற்றால் தரப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக

1. $|Z| < 5, -\frac{\pi}{6} < \arg(Z) < \frac{\pi}{6}$
2. $\frac{\pi}{3} \le \arg(Z) < \frac{2\pi}{3}$

பின்வருவனவற்றில் Z ஐக் காண்க

1. $|Z| = 4$ and $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$
2. $|Z+2+i| = 5$ and $\mathrm{Re}(Z-1) = 0$
3. $|Z-1+2i| = |Z+1|$ and $|Z-1| = \sqrt{2}$
4. $\arg(Z) = -\frac{\pi}{4}$ *and* $|Z| = 2$
5. $\arg(Z+1) = \frac{\pi}{6}$ and $\arg(Z-1) = \frac{2\pi}{6}$

பின்வருவனவற்றில் Z ஐக் குறித்துக் காட்டுக

1. $0 \le \arg(Z+1) \le \frac{\pi}{3}$ and $|Z+i| = 3$
2. $|Z+3-2i| \le 4$ and $\arg(Z+1) = \frac{5\pi}{6}$
3. $|Z| > 1, |Z| < 4$ and $\arg(Z) = -\frac{3\pi}{4}$

α , β என்பன இரு சிக்கலெண்களாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1) $\alpha \bar{\omega} + \bar{\alpha}\omega = 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha \bar{\omega})$

2) $(\alpha + \omega)\overline{(\alpha + \omega)} = \alpha\bar{\alpha} + \omega\bar{\omega} + 2\mathrm{Re}\,(\alpha\bar{\omega})$

3) $2\,|\,\mathrm{Re}\,(\alpha)\,|\,|\,\mathrm{Im}\alpha\,| \le |\alpha|^2$

4) $|\alpha| \le |\mathrm{Re}\alpha| + |\mathrm{Im}\,\alpha| \le \sqrt{2}|\alpha|$

5) $|\alpha + \omega| \le |\alpha| + |\omega|$

01. If $\arg (Z_1 - Z_2) - \arg (Z_1 + Z_2) = \frac{\pi}{2}$, Prove that $|Z_1| = |Z_2|$

02. If $|\,Z_1 - Z_2\,| = |\,Z_1 + Z_2\,|$ Prove that $\arg Z_1 - \arg Z_2 = \frac{\pi}{2}$

03. If $|\,Z_1 - Z_2\,| = |\,Z_1 + Z_2\,|$ Prove that $\frac{Z_1}{Z_2}$ is real

04. ஒரு சமபக்கமுக்கோணியின் உச்சிகள் Z_1, Z_2, Z_3 ஆலும்மையப்போலி Z_0 ஆலும் குறிக்கப்படின்

1) $\frac{1}{Z_1 - Z_2} + \frac{1}{Z_2 - Z_3} + \frac{1}{Z_3 - Z_1} = 0$ என நிறுவுக

2) $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 3Z_0^2$ என நிறுவுக

05. $|Z_1 - Z_2|^2 + |\,Z_1 - Z_2\,|^2 = 2\,|\,Z_1\,|^2 + 2\,|\,Z_2\,|^2$ என நிறுவுக

06. $|\,Z - 1\,| = 1$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

01) $\arg (Z - 1) = 2 \arg (Z)$

02) $\arg\left(\frac{Z - 2}{Z}\right) = + / 1 \frac{\pi}{2}$

03) $\frac{Z - 2}{2} = i \tan(\arg(Z))$

04) (a) புள்ளி P ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கல் எண் z ஐக் குறிக்கின்றது. சிக்கல் எண் Z^2 ஐ புள்ளி Q குறிப்பின், Q ஐ கேத்திர கணித முறையால் விபரிக்க. (கணிப்புக்கள் அவசியமில்லை)

P ஆனது (1,0) ஐ மையமாகவும் I ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தில் கிடக்கின்றது எனின்

1) $|\,Z^2 - Z\,| = |\,Z\,|$ எனவும்

2) $\arg (Z - 1) = \arg (Z^2) = \frac{2}{3} \arg(Z^2 - Z)$ எனவும் காட்டுக

(b) $\text{Arg}\left(\frac{Z+i}{Z-1}\right)=\pi/4$ ஆகுமாறு இன் ஒழுக்கைக் காண்க

(c) $|Z| < 5$ உம் $-\pi/6 < \text{Arg}\,Z < \pi/6$ உம் ஆகுமாறுள்ள பிரதேசத்தை ஆகன் வரிப்படத்தில் நிழற்றிக் காட்டுக.

05) (a) Z_1, Z_2 என்பன எவையேனும் இரு சிக்கலெண்களெனக் கொள்வோம். ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z_1+Z_2 ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியை அமைக்க.

$|Z_1+Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தை எடுத்துக் காட்டும் வரிப்படத்தை வரைக

பொதுவாக $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$ ஆக இருப்பது ஏனெனக் கேத்திரகணித முறையில் விளக்குக

$Z_1= -12+5i$ ஆகவும் $|Z_2| =5$ ஆகவும் இருப்பின், $|Z_1+Z_2|$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க

$|Z_1+Z_2|$ அதன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் கொண்டும் $\frac{\pi}{2} < \arg < z_2 < \pi$ ஆகவும் இருப்பின், Z_2 ஐ $p+ip$ வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க

(b) ஆகன் வரிப்படத்தில் A,B,C,D என்னும் புள்ளிகள் முறையே z_1,z_2,z_3,z_4 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன

AB யும் CD யும் செங்குத்தாக இடைவெட்டுமெனின், அப்போது $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ அறக் கற்பனையானதெனக் காட்டுக.

06) z என்பது சிக்கலெண் $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ எனக் கொள்வோம்

$2z^2$, $\frac{3}{z^2}$ என்னும் சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மட்டினையும் வீசலையும் காண்க

ஓர் ஆகன் வரிப்படத்திலே O ஆனது உற்பத்தியையும் A ஆனது சிக்கலெண் $2z^2$ ஐயும் B ஆனது சிக்கலெண் $\frac{3}{z^2}$ ஐயம் வகைகுறிக்கின்றன.

O விற்கும் B யிற்கும் ஊடாகச் செல்லும் கோட்டின் மீது z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளி கிடக்கின்றதா?

OACB ஓர் இணைகரமாக இருக்குமாறு புள்ளி C தெரிந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது. C யினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்லெண் $p+iq$ வைத் தெக்காட்டின் வடிவத்தில் துணிக

OACB யின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களைக் காண்க

07) சிக்கலெண் $w=\sqrt{3}+i$ ஐ $r(\cos 0+i\sin 0)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க இங்கே r>0 அதோடு $0\le 0<2\pi$ ஆக இருக்குமாறு 0 ஆரையனில் உள்ளது

w^2, w^3, w^4, w^5 ஆகியவற்றை மேற்குறித்த வடிவில் பெறுக

$6<|z|<30$ ஆகவும் $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{5\pi}{6}$ ஆகவும் இருக்குமாறு சிக்கலெண்கள் z ஐ ஆகன் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கம் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசம் R இல் கிடக்கின்றனவெனத் துணிக

சிக்கலெண் w^n (n=1,2……5) ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளிடையே எவை பிரதேசம் R இல் கிடக்கின்றனவெனத் துணிக.

08) சிக்கலெண் z ஆனது z=x+iy , y>0 இனால் தரப்படுகின்நது. ஆகன் வரிப்படத்தில் z,2iz,z+2iz ஆகியவற்றை நேரொத்த புள்ளிகள் முறையே A,B,C ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து, $A\hat{O}B, \tan A\hat{O}C$ ஆகியவற்றைத் துணிக

1) C ஆனது கற்பனையச்சின் மீது கிடந்தால் x இற்கும் y யிற்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமையைப் பெறுக
2) y=2x எனின் சிக்கலெண் z^2 ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியானது கோடு மீது கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக
3) $|Z|\le 4$ ஆகவும் $\tan^{-1}(\frac{1}{2})\le \arg z \tan^{1}(2)$ ஆனவும் இருக்கும் சிக்கலெண் zஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசத்தை வேறொரு வரிப்படத்தில் நிழற்றுக.

   நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க

09) (a) $\arg(Z-a)=\alpha$ எனின் z இன் ஒழுக்கை விவரிக்க இங்கு $a=\varepsilon R$ உம் $0<\alpha<\pi$ உம் ஆகும் $\arg(z+1)=\frac{\pi}{6}$ எனவும் $\arg(Z-1)=\frac{2\pi}{3}$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது

(b) சிக்கலெண் $\frac{5-i}{2-3i}$ ஐ $\lambda(1+i)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக இங்கு λ மெய்யானது λ பெறுமானத்தைக் கூறுக

இதிலிருந்து $\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)^6$ கற்பனையானதெனக் காட்டி அதன் பெறுமானத்தைத் துணிக

10) (a) $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்னும் சிக்கலெண்கள் ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் முறையே A,B என்னும் புள்ளிகளினால் வகைக்குறிக்கப்படுகின்றன. Arg Z_1 , Arg Z_2 ஆகியவற்றைக் காண்க.

OACB என்பது ஆகண் வரிப்படத்தில் ஒரு சதுரமெனத் தரப்பட்டிலுப்பின், உயினால் வகைக்குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணின் மட்டையும் வீசலையும் காண்க. இங்கு O ஆனது உற்பத்தியாகும்.

(b) 1) $\left|Z - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \leq 2$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு |Z-3| இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையும் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையும் காண்க

2) $Arg(Z-1) = \frac{\pi}{6}$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க

11) (a) $-1+\sqrt{3i}$, $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ என்பவற்றின் மட்டு, வீசலைக் காண்க

(b) 7+24i இன் வர்க்க மூலகங்களை a+ib என்ற வடிவில் காண்க

(c) $z+2-i=\sqrt{5}, \arg(\mathrm{z}+2) = +/-\frac{\pi}{2}$ ஆகுமாறுள்ள z இன் ஒழுங்குகளை ஆகண் வரிப்படத்தில் குறித்து z இனால் பொது சிக்கலெண்களை a+ib என்ற வடிவில் தருக.