

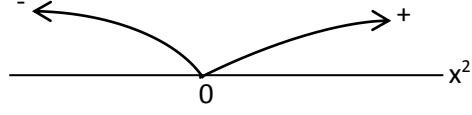
சமனிலிகள் (Inequalities)

✱ ஒரு மெய் எண் x ஆரை $x \geq 0$ என்பவற்றுள் ஏதாவது ஒன்றைக் கொள்ளும்

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 0$$

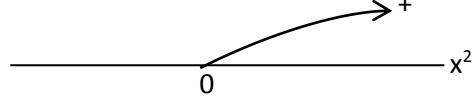


✱ $a, b \in \mathbb{R}$ எனின்

$$a - b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a - b \geq 0$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$$



$\therefore$ ஒரு நிறைவர்க்கத்தின் மிகக் குறைந்த பெறுமானம் 0 ஆகும்

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$$

✱

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

எடுப்புகள் (Propositions)

(01) $a > b$ எனின் $a + c > b + c$ ஆகும்

$a < b$ எனின் $a + c < b + c$ ஆகும்

(02) $a > b$ எனின் $ma > mb$, if $m > 0$

$ma < mb$, if $m < 0$

(03) $a > b, c > d$ எனின் $a + c > b + d$ ஆகும்

(04) $a > b > 0, c > d > 0$ எனின் $ac > bd$

Proof

$$(1) \quad (i) \quad (a + c) - (b + c) = a + c - b - c$$

$$= a - b$$

$$> 0, \quad a > b \Rightarrow a - b > 0$$

$$(ii) \quad (a + c) - (b + c) = a + c - b - c$$

$$= a - b$$

$$< 0, \quad a < b \Rightarrow a - b < 0$$

$$(a + c) - (b + c) < 0$$

$$a + c < b + c$$

(2) case I $m > 0$
 $ma - mb = m(a - b)$
 $= (+)(+), \quad a > b \Rightarrow a - b > 0$
 $ma - mb > 0$
 $ma > mb$

case II $m < 0$
 $ma - mb = m(a - b)$
 $= (-)(+)$
 < 0
 $ma - mb < 0$
 $\Rightarrow ma < mb$

(3) $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$
 $= (+) + (+), \quad a > b \Rightarrow a - b > 0$
 $c > d \Rightarrow c - d > 0$
 $= (+)$
 $(a + c) - (b + d) > 0$
 $\Rightarrow a + c > b + d$

(4) $ac - bd = ac - bc + bc - bd$
 $= c(a - b) + b(c - d)$
 $= (+)(+) + (+)(+), \quad a > b \Rightarrow a - b > 0$
 $c > d \Rightarrow c - d > 0$
 $= (+)$
 $ac - bd > 0$
 $\Rightarrow ac > bd$

(01) தீர்க்க

(i) $3(x - 2) > 4x - 5$
(ii) $2/3(x - 1) > 6x + 7$

(02) பின்வரும் சமனிலிகளை திருப்தி செய்யும் x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க

(i) $(x - 2)(x - 5) < 0$
(ii) $x(2x - 1)(x + 7) \geq 0$

(03) கீழ்வரும் சமனிலிகளின் x இன் பெறுமான வீச்சுத் தொடையைத் தருக.

(i) $\frac{1}{x} < 3$

$$(ii) \frac{x-2}{x-3} > 0$$

$$(iii) \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)} \geq 0$$

$$(iv) -3 \leq \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)} \leq 3$$

✱ a, b நேர் மெய் எண்கள் எனின் $a + b \geq \sqrt[2]{ab}$

Proof

$$a + b \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$a + b - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$$

$$a + b \geq \sqrt[2]{ab}$$

Note: $a, b \in \mathbb{R}^+$ எனின்

$$a + b \geq \sqrt[2]{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

✱ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ என்பன நேர் எண்களின் தொடரியாக இருக்க

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{1/n} \text{ ஆகும்.}$$

இதற்கான நிறுவல் கணித தொகுத்தறிவு முறை மூலம் செய்யலாம்

✱ a, b என்பன மெய் எண்கள் எனின் $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ஆகும்

Proof

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ எனின்}$$

$$a - b \in \mathbb{R} \text{ ஆகும்}$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

01. a, b, c என்பன மெய் எண்கள் எனின்

(i) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(ii) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

(iii) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$

02. a, b, c, d என்பன நேர் எண்களாயிருக்க $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[2]{ab}$ எனக் காட்டுக

இதிலிருந்து $\frac{a+b+c+d}{4} \geq (abcd)^{1/4}$ எனக் காட்டுக.

$d = \frac{a+b+c}{3}$ எனப்பிரதியிட்டு

$\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}$ என உய்த்தறிக

மட்டு (Modulus)

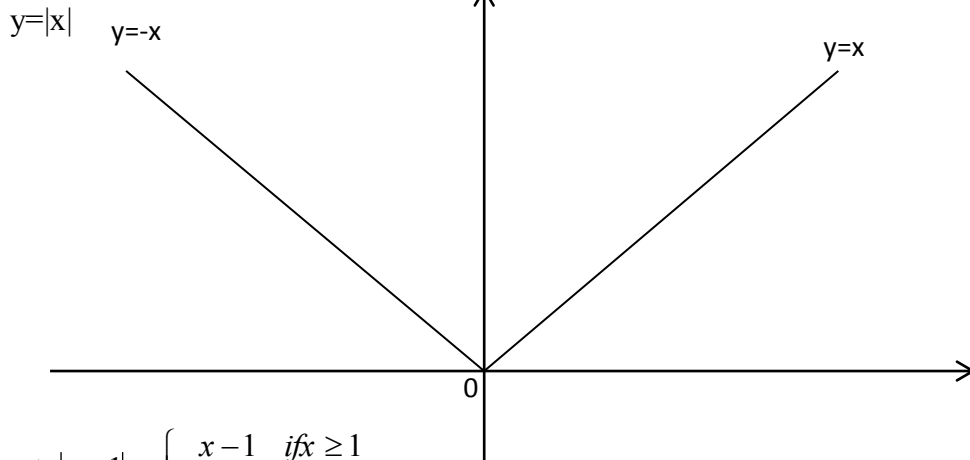
x என்பது மெய்யாய் இருக்க x இனது மட்டுப் பெறுமானம் பூச்சியம் or அதனிலும் கூடியது

ஆகும் இது $|x|$ என்பதால் குறிக்கப்படும்

$\therefore x \in IR$ எனின் $|x| \geq 0$ ஆகும்

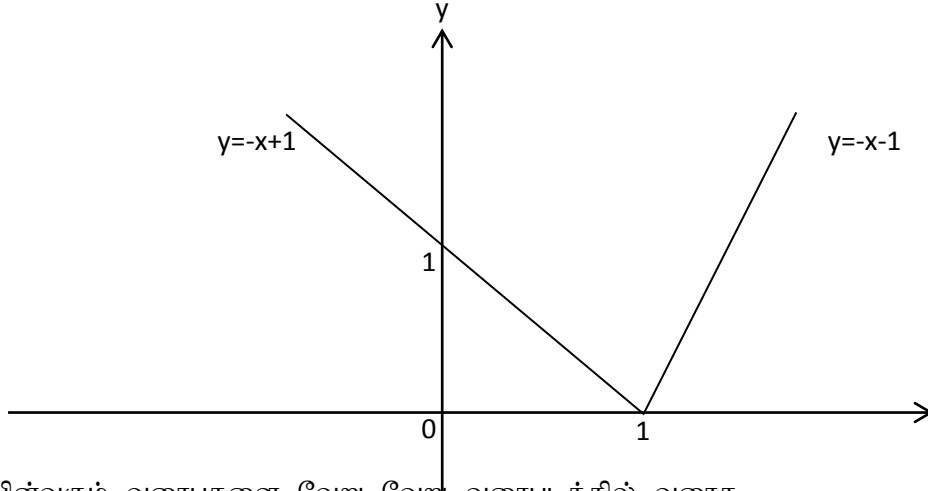
$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ இன் வரைபு



01) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{if } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{if } x < 1 \end{cases}$

$y = |x - 1|$ இன் வரைபு



02) பின்வரும் வரைபுகளை வேறு வேறு வரைபடத்தில் வரைக

- (i) $y = |x - 3|$
- (ii) $y = |2x - 1|$
- (iii) $y = |x + 5|$
- (iv) $y = |x - 1| + x$
- (v) $y = |2x - 1| + |x + 1| + 3$

03) பின்வரும் சமனிலிகளைத் தீர்க்க

- (i) $|x - 1| > 3$
- (ii) $|2x - 1| > 5$
- (iii) $|x - 1| > 2|x - 4|$
- (iv) $|2x - 1| - |x - 3| > 5x + 1$
- (v) $\frac{|x|}{x - 1} \leq 1$

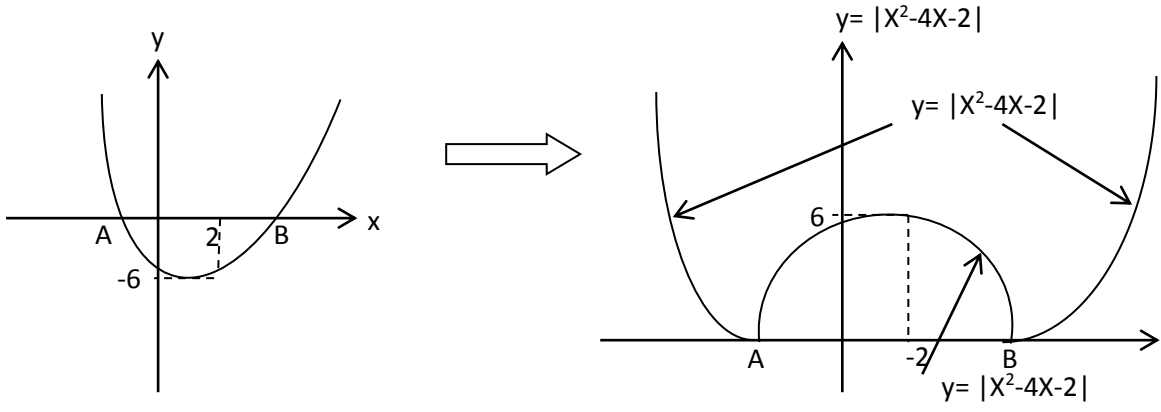
* $y = |ax^2 + bx + c|$ இன் வரைபு ($a, b, c \in IR$)

$$y = |x^2 + 4x - 2|$$

$$y = [x^2 - 4x + (-2)^2] - 2 - 4$$

$$y = (x - 2)^2 - 6$$

$$y_{\min} = -6 \quad x = 2$$



பயிற்சிகள்

01. a, b, c ஆகியன நேர் எண்களாயின்

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

b) $(a, b, c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

02. a, b, c ஆகியன நேர் எண்களாயின் $a + b + c = 1$ ஆகும் போது $\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}$ இன் ஆகக் குறைந்த பெறுமானம் 8 எனக்காட்டுக.

03. a, b, c, p, q, r ஆகியனவை எல்லாம் நேர் எனின் $\left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} \right) \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} \right) \geq 9$ எனக் காட்டுக.

04. எந்தவொரு நேர் x இற்கும் $x + \frac{1}{x} \geq 2$ எனக் காட்டுக. a, b, c ஆகியன நேர்

எண்களாயின் $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ எனவும் காட்டுக.

$a + b + c = 1$ எனின் $2-a, 2-b, 2-c$ என்பவை நேரானவை எனக் காட்டி

$\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq \frac{3}{5}$ என்பதை உய்த்தறிக.

05. a, b என்பன 1 இலும் பெரிதாய் இருப்பின் $2(ab + 1) > (a + 1)(b + 1)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து c யும் d யும் 1 இலும் பெரிதாய் இருப்பின் $8(abcd + 1) > (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)$ எனக் காட்டுக.

06. $a > 0, b > 0, a + b = 1$ ஆக இருப்பின் பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

a) $ab \leq \frac{1}{4}$

b) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

c) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

07. a, b என்பன மெய் எண்களாக இருக்குமெனின் $(a^2 + b)^2 + (b^2 + a)^2 < (a^2 + b^2 + 1)^2$ எனக் காட்டுக

08. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ஆகும் வண்ணம் x, y, z நேர் எண்களெனின் $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$ என நிறுவுக $(x-1)(y-1)(z-1) = 8$ ஆகும் போது x, y, z ஐக் காண்க.

09. a, b ஆகியன நேர் எண்களெனின் $\left(a + \frac{b}{2a}\right) > \sqrt{a^2 + b}$ எனக் காட்டுக.

10. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(z^2 + y^2 + x^2 - xy - yz - zx)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து எவையேனும் மறையில்லாத x, y, z இற்கு $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ எனக் காட்டுக.

11. $a^3 + b^3$, $(a+b)^3$ என்பவற்றின் விரிவுகளை எழுதுக. இவ்விரு முடிவுகளையும் பயன்படுத்தி $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ இனைக் காரணிப்படுத்துக. இதிலிருந்து a, b, c ஆகியன நேர் மெய் எண்களாக $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ இருக்கும் போது என்பதை உய்த்தறிக்க

12. நேரான p, q, r இற்கு

a) $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq [pqr]^{\frac{1}{3}}$

b) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{9}{(p+q+r)}$

c) $\frac{p}{q+r} + \frac{q}{r+p} + \frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக

13. a, b, c என்பன நேர் மெய் எண்களெனவும் $a, b \geq c$ எனவும் தரப்பட்டின்

$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$ எனக் காட்டுக

14. $2a+1 > b$ ஆயிருந்தால் $\sqrt{a^2 + b} > \left(a + \frac{b}{2a+1}\right)$ எனக் காட்டுக.

15. $|5-3x| \geq 2-3x$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

16. $\frac{1}{2}|x-1| > |x-4|$ ஆக இருக்கும் x இன் மெய்ப் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க
17. $\frac{(x+2)(3x-1)}{4x^3-3x+1} \geq 1$ என்னும் சமனிலியின் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.
18. $|x+| - |2x-1| > 2$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.
19. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$ எனும் சமனிலி விதாக இருக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
20. $1-|x| < |x^2-1|$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க
21. $y=|3x-a|$, $y=|bx-2|$ என்பவற்றின் வரைபுகளை பயன்படுத்தி $|3x-a| < |bx-2|$ ஐத் திருப்த்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடை $\left\{x/x > \frac{4}{3}\right\}$ எனின் a, b ஐக் காண்க ($a>b>0$)
22. $x^2 > |5x+6|$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.
23. $y = |x-a|$, $y=b|x+1|$ என்பவற்றின் வரைபுகளை பயன்படுத்தி $|x-a| > b|x+1|$ ஐத் திருப்த்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடை $x/-5 < x < \frac{1}{3}$ எனின் a, b ஐக் காண்க($a>b>0$)
24. $|2x-1| < ax+5$ ஆகுமாறு x இன் தீர்வு $x \in R/x > \frac{-4}{5}$ எனின் a ஐக் காண்க
25. $(7-x) \geq 2|x^2-4|$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.