தாயங்கள் (Matrices)

செவ்வக ஒழுங்கிலுள்ள எண்கள் தாயம் எனப்படும். பொதுவாக தாயங்கள் ஆங்கில பெரிய எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 1 $A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2x3}$ இது வரிசை 2 x 3 இல் உள்ள ஒரு தாயமாகும்

2 $B= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$ இது வரிசை 3X2 இல் உள்ள ஒரு தாயமாகும்

பொதுவாக வரிசை m X n இல் உள்ள தாயம் பின்வருமாறு எழுதப்படலாம்

$A= (a_{Ij})_{mxn}$ I = 1,2,…………………….. ,m, j=1,2……………,n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & --- & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

இங்கு m நிரைகளும் n நிரல்களும் உள்ளன

நிரல் தாயம் (Column matrix)

ஒரு நிரலை மட்டும் கொண்ட தாயம் நிரல் தாயம் அல்லது நிரல் காவி எனப்படும்

Eg $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ இது வரிசை 3X1 இல் உள்ள ஒரு நிரல் தாயமாகும்

நிரைத்தாயம் (Row matrix)

ஒரு நிரையை மட்டும் கொண்ட தாயம் நிரைத்தாயம் அல்லது நிரைக்காவி எனப்படும்.

Eg $(0\ -1\ 2\ 3)_{1x4}$ இது வரிசை 1x4 இல் உள்ள ஒரு நிரைத்தாயம்.

பூச்சியத் தாயம் (Zero matrix)

ஒரு தாயத்தின் எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியம் எனின் அது பூச்சியத்தாயம் எனப்படும்.

Eg (i) $O_{3x4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x4}$

(ii) $O_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$

சதுரத்தாயம் (Square matrix)

ஒரு தாயத்தின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமனாயின் அது சதுரத்தாயம் எனப்படும்

Eg (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{2x2}$

Eg (ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$

குறிப்பு: $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

அடையாளம் இடப்பட்ட பகுதி தாயத்தின் முந்நூறு மூலைவிட்டம் எனப்படும்

மூலைவிட்டத் தாயம் (Diagonal matrix)

ஒரு சதுரத்தாயத்தின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் தவிர்ந்த ஏனைய மூலகங்கள் எல்லாம் பூச்சியம் எனின் அது மூலைவிட்டத்தாயம் எனப்படும்.

Eg : $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$

எண்ணித் தாயம் (Scalar matrix)

ஒரு மூலைவிட்டத் தாயத்தின் மூலைவிட்டத்தின் வழியே உள்ள மூலகங்கள் எல்லாம் சமன் எனின் அது எண்ணித்தாயம் எனப்படும்.

Eg : $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{3x3}$

அலகுத்தாயம் / சர்வ சமன்பாட்டுத்தாயம் (Unit matrix / Identity matrix)

ஒரு சதுரத்தாயத்தின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் எல்லாம் 1 ஆகவும் ஏனைய மூலகங்கள் 0 ஆகவும் இருப்பின் அது அலகுத்தாயம் எனப்படும். இது I இனால் குறிக்கப்படும்.

Eg $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$

மேல்முக்கோணத்தாயம் (upper triangular matrix)

ஒரு சதுரத்தாயத்தின் மூலைவிட்டத்திற்கு கீழே உள்ள மூலகங்கள் எல்லாம் 0 எனின் அது மேல்முக்கோணத்தாயம் எனப்படும்.

Eg: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$

கீழ் முக்கோணத்தாயம் (Lower triangular matrix)

ஒரு சதுரத்தாயத்தின் மூலைவிட்டத்தின் மேலே உள்ள மூலகங்கள் எல்லாம் 0 எனின் அது கீழ் முக்கோணத்தாயம் எனப்படும்.

Eg: A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$

B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$

தாயமொன்றின் நிலைமாற்று (Transpose of amatrin)

ஒரு தாயத்தின் நிரைகளன ஒத்த நிரல்களுடன் இடம் மாற்றும்போது பெறப்படும் தாயம் தரப்பட்ட தாயத்தின் நிலைமாற்றுத்தாயம் எனப்படும்.

தரப்பட்ட தாயம் A எனின் அதன் நிலைமாற்றுத்தாயம் A^TO1 A^i இனால் குறிக்ககப்படும்

Eg: A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$ எனின் A^T = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$

Note :-ஒரு சதுரத்தாயத்தின் வரிசையும் அதன் நிலைமாற்றுத்தாயம் வரிசையும் சமனாகும்.

சமமான தாயங்கள் (equel matrices)

ஒரே வரிசையையும் ஒத்த மூலகங்களையும் உடைய தாயங்கள் சமமான தாயங்கள் எனப்படும்

ஒருருவாக்கத்தாக்க தாயங்கள் (Confamable mateices)

ஒரே வரிசையுடைய தாயங்கள் ஒருருவாக்கத்தாக்க தாயங்கள் எனப்படும். இவை நாட்டட் தகவுடையனவாகும்

தாயங்கள் கூட்டல் (Addition of matrices)

ஒரே வரிசை உள்ள இரு தாயங்களை கூட்டும் போது அவற்றின் ஒத்த மூலகங்கள் கூட்டப்படும் கூட்டிப் பெறப்படும் தாயத்தின் வரிசையும் தரப்பட்ட தாயங்களின் வரிசையை ஒத்ததாகும்.

Eg: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{2x3}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}_{2x3}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{2x3} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+2 & 3+5 \\ 2+0 & -1+2 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

தாயக்கூட்டலின் பண்புகள்

(i) $A+B = B+A$ (பரிவர்த்தனை விதி)

(ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (சேர்த்தி விதி)

(iii) $A+O = A = O+A$

தாயமொன்றை எண்ணியால் பெருக்குதல் (Scalar multiplication of a matrix)

λ என்று ஓர் எண்ணியாகாம் A_{man} ஒரு தாயமாகாம் இருக்க $\lambda A = \lambda(aij)_{mxn} = (\lambda aij)_{mxn}$

Eg :- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2x3}$ எண் $3A = \begin{pmatrix} 3x1 & 3x2 & 3x\ 5 \\ 3x\ 3 & 3x\ 4 & 3x\ 6 \end{pmatrix}_{2x3}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 12 & 18 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$\lambda = -1$ ஆகும் போது $\lambda A = -A$ ஆகும்.

$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

Note :- A-B = A+(-1)B

பயிற்சி

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ஐ சுருக்குக.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ எனின் 3A ஐக் காண்க.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ எனின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

A+B, A-B, 2A+3B 3A-5B

(4) $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ எனின் $\lambda\mu$ என்பவற்றைக் காண்க.

நியமாற்றுத்தாயத்தின் பண்புகள்.

i. $(AT)^T = A$

ii. $(A+B)^T = A^T + B^T$

(i) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}_{3x4}$ எனின்

-1 2 5
1 0 -3
2x3

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}_{4x3}$$

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}_{3x4}$$

$\therefore (A^T)^T = A$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}_{2x3} , \quad B = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1+p_1 & a_2+p_2 & a_3+p_3 \\ b_1+q_1 & b_2+q_2 & b_3+q_3 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} a_1+p_1 & b_1+q_1 \\ b_2+p_2 & b_2+q_2 \\ b_3+p_3 & b_3+q_3 \end{pmatrix}_{3x2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \\ p_3+q_3 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$A^T+B^T = \begin{pmatrix} a_1+p_1 & b_1+q_1 \\ a_2+p_2 & b_2+q_2 \\ a_3+p_3 & b_3+q_3 \end{pmatrix}_{3x2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$A^T = \begin{matrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{matrix}_{3x2}$$

$\therefore$ 1,2 $\Rightarrow$ $(A+B)^T = A^T + B^T$

Eg :- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

$(A+B)^T = A^T + B^T$ ஐ வாய்ப்புப்பார்க்க.

வாய்புப்பார்த்தல்

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}_{3x2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}^{2x3} \quad , \quad B^T \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}_{3x2}$$

$$\Rightarrow A^T + B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}_{3x2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$(1),(2) \rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$

சமச்சீர்த்தாயம் (Symmetric Matrix) ஒரு சதுரத்தாயம் A ஆனது $A=A^T$ ஆகுமாறு இருப்பின் தாயம் A சமச்சீர்த்தாயம் எனப்படும்.

Eg :- $A \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

இங்கு $A = A^T$ ஆகும்.

ஓராயச்சமச்சீர்தாயம் (Skew symmetric matrix) ஒரு சதுரத்தாயம் A ஆனது $A^T = -A$ ஆகுமாறு இருப்பின் தாயம் A ஆனது ஓராயச்சமச்சீர்த்தாயம் எனப்படும்.

Eg :- $\begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$

Note :-

1. ஓராயச்சமச்சீர்த் தாயத்தின் மூலைவிட்டத்தின் வழியே உள்ள மூலகங்கள் எல்லாம் பூச்சியம் ஆகும்.
பின்வரும் தாயங்களில் சமச்சீர்த்தாயம் ஓராயச்சமச்சீர்த்தாயத்தை இனம் காண்க.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ,C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

2. பின்வரும் தாயங்கள் எவ்வகைத் தாயங்கள் எனக்கூறுக.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad ,C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Note: - ஒரு சதுரத்தாயத்தை ஒரு சமச்சீர் தாயத்தினதும் ஓர் ஓராயச்சமச்சீர்த்தாயத்தினதும் கூட்டலாக எழுதலாம் இக்கூட்டல் ஒரு தனியானது.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$ எனின் $$\begin{matrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$B = \frac{1}{2}(A+A^T)$ எனின்

$$\left\{ \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \right\}$$

$= \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}_{2x2} \quad +$

$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_1 & a_2 + b_1 & a_3 + c_1 \\ a_2 + b_1 & 2b_2 & b_3\ c_3 \\ c_3 + c_1 & b_3 + c_3 & 2c_3 \end{pmatrix}$$

$D = \frac{1}{2} (A - A^T)$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_1 - a_2 & c_1 - a_3 \\ a_2 - b_1 & 0 & b_2 - c_2 \\ a_3 + c_1 & b_3 + c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (a_2 - b_1) & (c_1 - a_3) \\ a_2 - b_1 & 0 & -(b_3 - c_2) \\ -(c_1 - a_3) & b_3 + c_2 & 0 \end{pmatrix}$$ உரு ஓராயச்சமச்சீர்த்தாயம்.

$B + D = \frac{1}{2} (A + A^T) + \frac{1}{2} (A - A^T)$

$= A$

Eg : $A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ எனின்

$B = \frac{1}{2} (A + A^T) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \right\}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$ சமச்சீர்த்தாயம்

$$D = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ ஒராடச்சமச்சீர்த்தாயம்

மேலும் B+D =A

தாயங்களின் பெருக்கம் (Multiplication of matrices)

பெருக்கற் தகவுடைய தாயங்கள்

முதலாவது தாயம் A இன் வரிசை mxn ஆகவும் இரண்டாவது தாயம் B இன் வரிசை nxp ஆகவும் இருப்பின் A யும் B யும் AB என்ற பெருக்கத்தை தருமாறு உள்ள பெருக்கற் தகவுடைய தாயங்கள் எனப்படும்.

அதாவது முதலாவது தாயத்தின் நீரல்களின் எண்ணிக்கையும் இரண்டாவது தாயத்தின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமனாக உள்ள போது AB என்ற பெருக்கம் வரையறுக்கப்படும் இங்கு BA வரையறுக்கப்படமாட்டாது

Eg : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{2x3}$ $B= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$

$A_{2x3}\ B_{3x3} = C_{2x3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{2x3} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$$

$C_{11} = 2x2 + 3x1 + 4x5 = 27$

$C_{12} = 2x7 + 3x3 + 4x4 = 39$

$C_{13} = 2x1 + 3x2 + 4x1 = 20$

$C_{21} = 5x2 + 6x1 + 7x5 = 51$

$C_{22} = 5x7 + 6x3 + 7x4 = 81$

$C_{23} = 5x1 + 6x2 + 7x3 = 38$

$$AB = \begin{pmatrix} 27 & 39 & 20 \\ 51 & 81 & 30 \end{pmatrix}$$

குறிப்பு : சதுரத்தாயங்களில் பெருக்கங்கள் AB,BA என்பன வறயறுக்கப்படினும் AB =BA ஆக இருக்கவேண்டியதில்லை

Eg :- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x1 + 2x4 & 1x3 + 2x5 \\ 3x\text{-}1 + 4x4 & 3x3 + 4x5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 13 & 29 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1x1 + 3x3 & -1x2 + 3x4 \\ 4 \text{ x } 1 + 5x3 & 4x2 + 5x4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$$

இங்கு $AB \neq BA$ ஆகும்,

குறிப்பு $A^2 = AA$ ஆகும் இங்கு A சதுத்தாயம்

Eg :- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ எனின் A^2 ஐயும் A^3 ஐயும் கணிக்க.

$A^2 = AA$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$A^3 = A^2A$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 21 & 118 \end{pmatrix}$$

Eg :- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ எனில் I_A, AI என்பவற்றைக் காண்க.

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

இங்கு AI = IA = A ஆகும்.

தாயப்பெருக்கங்களின் இயல்புகள்

(i) $\lambda(AB) = (\lambda A)\, B = A\, (\lambda B)$

(ii) $(AB)C = A(BC)$

(iii) $A(B+C) = AB + AC$

(iv) $AB = 0 \neq A=0$ or $B=0$

(v) $A \times 0 = 0 \times A = 0$

(vi) $AB = AC \neq B=C$

(vii) $AI = IA = A$

(viii) $(AB)^T = B^T A^T$

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ என்க

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -6 & 36 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$

$2(AB) =$ ……………(1)

$2A = 2 \quad = \quad 2B = 2 \quad =$

$(2A)B = \quad =$ ……………..(2)

$$A(2B) = \quad = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -6 & 36 \end{pmatrix}$$ ……………(3)

(1),(2),(3) $\Longrightarrow$ $2(AB) = (2A)B = A(2B)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ ………..(1)

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

(1),(2) $\Rightarrow$ (AB)C= A(BC)

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$B+C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2x3 3x2 3x2

$$A(BxC) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore A(B+C) = AB + AC$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore AB = 0$ ஆனால் $A \neq 0, B \neq 0$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$AC =$

$=$

AB – AC ஆனால் B≠C

(6) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2x3}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore (AB)^T = B^T A^T$

தாயமொன்றின் நேர்மாறு (Inverse of a martin)

தரப்பட்ட சதுரத்தாயம் A இங்கு AB =BA =I ஆகுமாறு தாயம் B காணப்படின் தாய் B ஆனது தாயம் A யில் நேர்மாறு தாயம் எனப்படும் இதை $B = A^{-1}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

Note :- (1) AB = BA = ஐ என்னும் $A^{-1} = B$ மட்டுமன்றி $B^{-1} = A$ உம் ஆகும்.

(2) AB = I எனில் BA =I எனக்காட்டலாம். எளிய AB =I ஆகுமாறு தாய் B ஐக் காணப்போதுமானது.

தனிச்சிறப்பற்ற தாயம் (Non – Singular natural)

ஒரு தாயத்திற்கு நேர்மாறுதாயம் காணப்படில் அத்தாயம் தனிச்சிறப்பற்ற தாயம் எனப்படும்.

தோற்றம் :

1. தாயமொன்றிற்கு நேர்மாறுகாணப்படின் அது தனியானது (unglue)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A)^{-1} = (A^{-1})^{T}$

நிறுவல்

1. A இற்கு B,C எனினும் இரு நேர்மாறு தாயங்கள் உள்ளன என்க.

$AB = BA = I$ …………..(1)

$AC = CA = I$ ………..…(2)

$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

$\therefore B = C$

2. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

3. $(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1}$

$= AIA^{-1}$

$= AA^{-1}$

$= I$

இதேபேல் $B^{-1}A^{-1} = I$ எனக்காட்டலாம்.

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^{-})(A^{-1})^{T} = (A^{-1}A)^{T}$

$= I^{-}$

$= I$

$\therefore (AT)^{-1} = (A^{-1})^{T}$

வரிசை 2 ஐ உடைய தனிச்சிறப்பற்ற தாயத்தின் நேர்மாறு தாயம் கானல்

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறுதாக்கக்காண்போம்

A இன் நேர் மாறு $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம்.

$AB = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b+2d \\ 3a + 4c & 3d+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a + 2c = 1$ ……..(1)

$3a + 4c = 0$ ……..(2)

$b + 2d = 0$ ……..(3)

$3b + 4d = 1$ ……...(4)

$(1),(2) \rightarrow a = -2$

$c = 3/2$ $\therefore A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$(3),(4) \rightarrow d = -1/2$

$b = 1$

Note :- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ எனின் det A $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ஆகும்.

Note : $|A| \neq 0$ எனின் தாயம் A ஆனது தனிச்சிறப்பற்றதாயம் எனப்படும்.

Eg : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற தாயத்தின் நேர்மாறு தாயத்தைக் காண்க.

$A^1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ என்க.

$AA^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad =$$

$ap + br = 1$ ………..(1)

$cp + dr = 0$ ……….(2)

$aq + bs = 0$ ……….(3)

$cq + ds = 1$ ……….(4)

(1),(2) ⇨ $p = \dfrac{d}{ad - bc}$

$q = \dfrac{-b}{ad - bc}$

(3),(4) ⇨ $r = \dfrac{-c}{ad - bc}$ $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$S = \dfrac{a}{ad - bc}$

$\therefore \ A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}$

மூலைவிட்டத்தாயத்தின் நேர்மாறு காணுதல்.

$A = \begin{pmatrix} P & o & o \\ o & q & o \\ o & o & r \end{pmatrix}$ என்க $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ என்க A இன் நேர்மாறு தாயம்

$$A = \begin{pmatrix} P & o & o \\ o & q & o \\ o & o & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$$

$Pa_1 = 1 \rightarrow a_1 = 1/P$

$Pa_2 = 0 \rightarrow a_2 = o$

$Pa_3 = 0 \rightarrow a_3 = 0$

$qb_1 = 0 \rightarrow b_1 = 0$

$qb_2 = 1 \rightarrow b_2 = 1/q$

$qb_3 = 0 \rightarrow b_3 = 0$

$rc_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0$

$rc_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0$

$rc_3 = 1 \rightarrow c_3 = 1/r$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/P & o & o \\ o & 1/q & o \\ o & o & 1/r \end{pmatrix}$$

குறிப்பு :-

ஒரு மூலைவிட்டத்தாயத்தின் நேர்மாறுதாயம் மூலைவிட்டத்தாயமாக இருப்பதுடன் அதன் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் தரப்பட்ட தாயத்தின் மூலைவிட்ட மூலகங்களின் தலைகீழ்ப் பெறுமானங்களாக இருக்கும்.

$2x + 3y = 8$

$x - y = -1$ என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு தாயப்பெருக்க வடிவில் எழுதலாம்.

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$AX = B$ இங்கு $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2x1}$ $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}_{2x1}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ எனின் $A^{-1} = {}^{-1}/_5 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1/_5 & {}^3/_5 \\ {}^1/_5 & {}^{-2}/_5 \end{pmatrix}$

$AX = B$

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$(A^{-1}A)\, X = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

$$= \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore x=1 \; y=2$

இருமாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டு சோடிகளைத் தீர்த்தல்

$a_1x + b_2y = c_1$

$a_1x + b_2y = c_2$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

i. $a_1a_2 - a_2b_1 \neq$ எனின் இச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தனியான தீர்வு உண்டு.

ii. $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ஆகவும் $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ ஆகவும் இருப்பின் நேர்கோடுகள் பொருத்து எனில் சமன்பாட்டின் முடிவில் எண்ணிக்கையான தீர்வுகளைக்கொண்டிருக்கும் அதாவது $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ எனின் முதலில் எண்ணிக்கையான தீர்வுகளாகவும் கொண்டிருக்கும்.

iii. $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ஆகவும் $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ ஆகவும் இருப்பின் நேர்கோடுகள் சமாந்தரமானது எனில் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வுகள் இல்லை

அதாவது $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ எனின் சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வுகள் இல்லை.

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_1x + b_2\, y = c_2$ என்ற ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் தாயப்பெருக்க வடிவில்

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

AXc

இங்கு A = , X = , C=

- $|A| = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ எனின் இச்சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு ஒரு தனியான தீர்வு உண்டு.
- $|A| = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ எனின் இச்சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு முடியிருப்பதை எண்ணிக்கையான தீர்வுகள் இருக்கும் அல்லது தீர்வுகள் இருக்காது.

பயிற்சி

01. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வுகள் காண்க.

02. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ உம் எனின் $A^2 = 3A - 2I$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து A^{-1} ஐக் காண்க. மேலும் n ஒரு நேர்நிறைவெண்ணாக இருக்க $A^n = (2^n-1)A -2(2^{n-1} -1)I$ எனக்காட்டுக.

03. $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ எனவும் தரப்பட்டிருக்க தாயம்

AB ஒராயச் சமச்சீராக இருக்குமாறு x இன் பெறுமானத்தையும் y இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

$x + 2y + 3z = 2$

$-2y + z = 4$

$2y + x = 8$

என்னும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியானது $Ax = B$ என்று எடுத்துரைக்கக்கூடியதாக தாயம் A ஐ எழுதுக. இங்கு $X^T = (xyz)$, $B^T = (2\ 4\ 8)$, $A^3 - 5A + 4I = 0$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $CA = I$ ஆகுமாறு தாயம் C ஐக் காண்க கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வை உய்த்தறிக.

04. x = a, x + y = b , -x + y + z =c என்னும் சமன்பாடுகளை Ax =B வடிவத்தில் எழுதும் போது கிடைக்கும் தாயம் யு யைக் காண்க. இங்கு X^T =(x y z) உம் B^T (a b c) உம் ஆகும். x , y, z இற்கு a, b, c யின் சார்பில் தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் தாயம் A^{-1} ஐ எழுதுக.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ எனின் CC^T ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்கும் போது சமன்பாடு $AC^Tx = D$ யிற்கு ஒரு தனித்தீர்வு எதுவும் உண்டா? உமது விடையை ஒப்பிக்க.

05. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ r & q & 1 \end{pmatrix}^{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p & 1 & 0 \\ pq & -r\ q & 1 \end{pmatrix}$ எனக்காட்டுக.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

எனக்கொள்வோம்

AB= C ஆக இருக்கத்தக்கதாக a,b,c,d ஆகியவற்றைக் காண்க.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ எனின் $\begin{matrix} x + 2y - 32 = 9 \\ 2r + 3y + 2 = 5 \\ 5n + 7y + 4z = 8 \end{matrix}$ என்னும் சமன்பாடுகளின்

தொகுதியை ஒரு தக்க நிரல்தாயம் D உடன் AB x = D என்றும் வடிவத்தில் எழுதுக. $A^{-1}D$ யைக் கண்டு, இதிலிருந்து x,y,z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்ளைக் காண்க.

06. A என்பது வரிசை 2 இலான தனிச்சிறப்புத் தாயமெனின், யாதாயிழனும் நேர்நிறைவென் t யிற்கு $A^k = a^{k-1}A$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஓர் எண் a இருக்கின்றதென நிறுவுக.

A ஆனது தாயம் $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ எனின் a யைக் காண்க.

07. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -P & 1 & 0 \\ P-6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ B = எனவும் கொள்வோம் BA = 2J எனக்காட்டுக.

$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ AX =Y எனின் X ஐ P யின் சார்பில் காண்க.

08. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம் $A^2 = A$ எனக்காட்டி $(I-A)^2 = I-A$ ஐ உய்த்தறிக.

இங்கு ஐ ஆனது 3ஆம் வரிசையில் அமைந்த சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும். இதிலிருந்து $n \varepsilon Z^-$ இற்கு $(I-A)^n = I-A$ எனவும் $(I+A)^n = I + (2^n-1) A$ எனவும் காட்டுக.

09. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ எனின் $A^2 + 3A = 10I$ எனக் காட்டுக. இங்கு I ஆனது வரிசை 2 இன் சர்வசமன்பாட்டுத்தாயமாகும் இதிலிருந்து A^{-1} ஐக் காண்க.

10. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ எனின் Bx = XC ஆக இருக்கத்தக்கதாக வரிசை 2 இன் ஒரு தாயம் x இன் பொதுவடிவம் $x = \begin{pmatrix} r & y \\ r & -y \end{pmatrix}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு x,y R

இதிலிருந்து $P^T BP$ ஆகவும் $P^TP =$ ஐ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக வரிசை 2 இன் ஒரு சதுரத்தாயம் P யைக்காண்க. இங்கு I ஆனது வரிசை 2 இல் சர்வசமன் பாட்டுத்தாயமாகும்.