புள்ளிவிபரவியல் -[STATISTICS]

வரைவிலக்கணம்.

புள்ளிவிபரவியலானது அளக்கப்படக்கூடிய தரவுகளிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் தன்மைகளை அனுமானிக்கும் விஞ்ஞானமாகும்.

உதாரணம் :- ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் நிறைகள் அல்லது உயரங்கள் என்பவற்றைப் பற்றி ஆராய்தல்.

அலகு அல்லது மூலகம் [Unit or Element]

புள்ளிவிபரவியலில் எந்தவொரு பொருளின் பண்பைப்பற்றி தரவுகள் அல்லது விபரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றனவோ அப்பொருள் மூலகம் அல்லது அலகு எனப்படும்.

தொகுதி அல்லது ஈட்டம் [Population]

அலகுகளின் முழுத்தொகுதியானது புள்ளிவிபரவியலில் தொகுதி அல்லது ஈட்டம் எனப்படும்.

அலகுத் தொகுதி

உதாரணம் :-

1. ஒரு வகுப்பிலிருக்கும் மாணவர்களின் நிறைகள் அல்லது உயரங்கள் கணிக்கப்படும் போது ஒவ்வொரு மாணவனும், ஓர் அலகாகக் கருதப்படும். அவ்வகுப்பிலுள்ள மொத்த மாணவர்கள் தொகுதி அல்லது ஈட்டம் எனப்படும்.
2. ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மின்குமிழ்களின் ஆய்வுக்காலத்தைப் பரலிசோதிப்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம்.
   இப்பரிசோதனையில் ஒவ்வொரு மின்குமிழும் அலகு எனப்படும் அங்கு உற்பத்தி செய்யப்பட்ட செய்யப்படப்போகின்ற முழு மின்குமிழ்களின் தொகுதியானது இப்பரிசோதனைக்குரிய தொகுதி அல்லது ஈட்டம் எனப்படும்.

குறிப்பு:-

உதாரணம் :

(1) இல் தொகுதி அல்லது ஈட்டமானது முடிவுள்ளதாகவும் [definite]

(2) இல், தொகுதி அல்லது ஈட்டமானது, முடிவுற்றதாகவும் [indefinite] உள்ளது.

மாதிரி [Sample]

ஒரு பரிசோதனையின் போது தொகுதி அல்லது ஈட்டத்திலுள்ள ஒவ்வோர் அலகையும், பரிசோதிப்பது இயலாத காரியமாகலாம். அந்நிலையில் தொகுதி அல்லது ஈட்டத்திலிருந்து தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு சில அலகுகளே பரிசோதனைக்குட்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வாறு தெரிந்தெடுக்கப்படும் அலகுகளின் தொகுதி மாதிரி எனப்படும்.

வீச்சு [Range]

தரப்பட்ட பெறுமதிகளின் மிகக் குறைந்த பெறுமதிக்கும், மிகக்கூடிய பெறுமதிக்கும் இடைப்பட்ட வித்தியாசம் வீச்சு எனப்படும்.

மாறி [Variable]

அவதானிக்கப்படும் அலகுகளின் பண்பு ஆனது அளக்கப்படக்கூடியதாக இருப்பின் அது மாறி எனப்படும்.

உதாரணம் :- ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மின்கடத்திகளின் கடத்துத்திறன் மாறி எனப்படும். மாறி இரு வகைப்படும்.

i. தொடர்ச்சியான மாறி

ii. பின்னகமாறி(தொடர்ச்சியற்ற மாறி

(1) தொடர்ச்சியான மாறி [Continuous Variable[

ஒரு மாறியானது எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கக்கூடியதாக இருப்பின் அது தொடர்ச்சியான மாறி எனப்படும்.

உதாரணம்:- ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் நிறைகள் அல்லது உயரங்கள்

(2) பின்னக மாறி [Discrete Variable]

ஒரு மாறியானது குறிப்பிட்ட பெறுமானத்தை மட்டும் எடுக்கக்கூடியதாக இருப்பின் அது பின்னகமாறி அல்லது தொடர்ச்சியற்ற மாறி எனப்படும்.

உதாரணம் : ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

மீள் திறன் [Frequency Distribution]

சேகரிக்கப்பட்ட எண் தரவுகள் பயன்படுத்தப்படும் முறைகளில் மிகப் பிரதானமான மீள்திறன் பரம்பலாகும்.

உதாரணம் : மீள்திறன் அட்டவணை

வகை 1

ஈட்டுக்கள் குடும்பத்திலுள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை	தனி எண்ணில் (மீள்திறன் (F) குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
0	11
1	15
2	17
3	20
4	14
5	6

வகை 2

ஈட்டுக்கள் உயரம் [cm]K	வகுப்பாயிடைகளில் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f
வகுப்பு C_1 40-45	2
வகுப்பு C_2 45-50	8

வகுப்பு C_3 50-55	12
வகுப்பு C_4 55-60	15
வகுப்பு C_5 60-65	13
வகுப்பு C_6 65-70	10

வகுப்பாயிடையின் வகுப்புப் பெறுமானம் அதற்குப் பொறுப்பு உதாரணமாக C_1 வகுப்பாயிடையின் வகுப்புப் பெறுமானம் 42.5 ஆகும். ஒவ்வோர் வகுப்பிலுமுள்ள அலகுகளின் தொகை மீடிறன் எனப்படும்.

வகுப்புப் பெறுமானம் [Value of Class]

ஒரு வகுப்பிடையின் நடுப்பெறுமானம் அவ்வகுப்பின் பெறுமானம் எனப்படும் உதாரணமாக, மேலேயுள்ள அட்டவணையில் C_2 இன் வகுப்புப் பெறுமானம் 47.5 ஆகும்.

மீடிறன் அட்டவணையைத் தயாரித்தல்.

மீள்திறன் அட்டவணையைத் தயாரிக்கும் போது அவற்றின் மிகக்கூடிய பெறுமானத்தையும் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தையும் கருத்திற்கொண்டு இப்பெறுமானங்களுக்கு ஏற்ற முறையில் வகுப்புக்களாகப் பிரிப்போம். இவ்வகுப்புக்களைப் பிரிக்கும் போது பின்வரும் கருத்துக்களைக் கவனித்தல் வேண்டும்.

1. வகுப்பிடைகள் ஒரே சீரான அகலமுடையதாகவும், பெறப்பட்ட பெறுமதிகளில் இருந்து பரம்பல்.

2. வகுப்புகளின் வீச்சானது தரப்பட்ட தரவுகளின் வீச்சைத் தன்னுள் அடக்கக்கூடியதாக இருப்பதோடு வகுப்புக்கள் தொடர்ச்சியானவையாகவும் அமைக்கப்படல் வேண்டும். அதாவது ஒரு வகுப்பின் மேல் எல்லையும், அதற்கடுத்த வகுப்பின் கீழ் எல்லையும் சமனானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

   இவை சமமில்லாது இருப்பின், இவற்றிடையேயான வித்தியாசம் X அலகுகளாகவும் இருப்பின் மேல் எல்லையை x/2 அலகுகளால் அதிகரிப்பதாலும் கீழ் எல்லையை x/2 அலகுகளால் குறைப்பதாலும் வகுப்புக்களைத் தொடர்ச்சியுள்ளதாக்கலாம். (இடையம், ஆகாரம், கணிக்கும் போது முக்கியமாக கவனிக்க.)

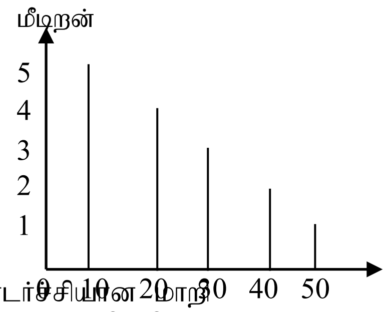
3. வகுப்புக்களை அமைக்கும் போது, ஒரு வகுப்பின் வகுப்புப் பெறுமானமானது, முழு எண்ணாக இருக்கும் வண்ணம் அமைப்போமாயின் கணிப்பு வேலைகள் இலகுவானது.

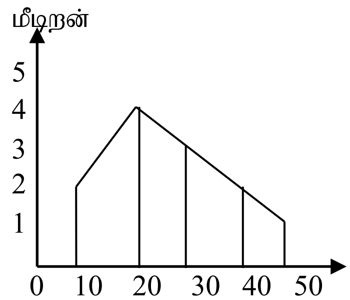
4. ஒரு மீள்திறன் அட்டவணையில், வகுப்பிடைகள் சமமாகவும், ஆனால் முதல் வகுப்பும் கடைசி வகுப்பும் ஓர் எல்லையைக் கொண்டிராவின் கணிப்பு வேலைகளுக்கு அவ்வகுப்புக்களும் அதே வகுப்பிடையையே கொண்டதாகக் கருதப்படும்.

மீள்திறன் பல்கோணி [Frequency Polygon]

1) பின்னகமாறி

ஒரு பின்னகமாறிக்கு கீறப்படும் வரைபானது நேர்கோட்டு வரைபாகும் இவ்வரைபானது பின்னகமாறிக்கு எடுக்கப்படும் பெறுமானங்கள் x- அச்சிலும், மீள்திறன் y – அச்சிலும் குறிக்கப்பட்டு கீறப்படும் இந்நேர்கோட்டு வளையியின் உச்சிகளை நேர்கோடுகளால் இணைத்து பெறப்படும் பல்கோணியானது, மீள்திறன் பல்கோணி எனப்படும்.

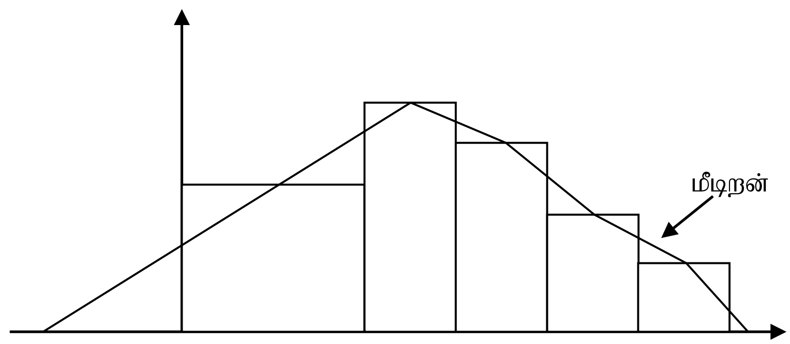




2) தொடர்ச்சியான மாறி

நேர்கோட்டு வரைபு

ஒரு தொடர்ச்சியான மாறிக்கு வரையப்பட்ட வலைவடிவ வரைபில் ஒவ்வொரு செவ்வகத்தினதும் மேற்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் தொடுத்துப் பெறப்படும் பல்கோணியானது மீடிறன் பல்கோணி எனப்படும்.

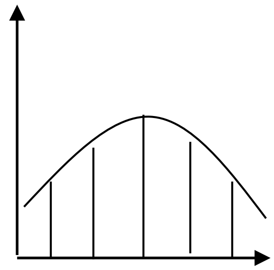


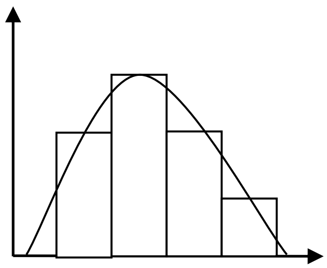
ஒரு வலைவடிவ வரைபின் ஒவ்வொரு வகுப்பின் மீடிறன் ஆனது அவ்வகுப்பிற்குரிய செவ்வகத்தின் பரப்பிற்கு விகித சமனாக இருக்கும் எனவே வலைவடிவ வரைபில் முழுப்பரப்பானது தொகுதியின் மொத்த மீடிறனுக்கு விகிதசமனாகும்.

மீள்திறன் வளையி [Frequency Curve]

மீள்திறன் பல்கோணியை சீராக்குவதால் பெறப்படும் சீரான வளையியானது மீடிறன் வளையி எனப்படும்.

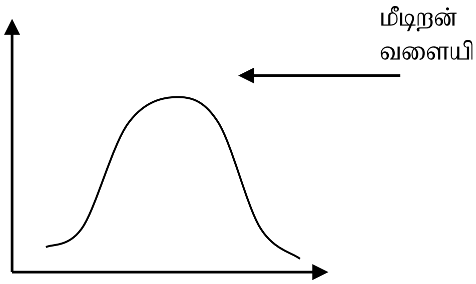
பின்னக மாறி **தொடர்ச்சியாமாறி**





இவ்வகை மீடிறன் வளையியிற்கும் x- அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பானது வலைவடிவ வரைபின் பரப்பிற்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

மீள்திறன் வளையி, ஓர் அழுத்தமான வளையியாகவும் அமையும்.



X இன் பெறுமானங்கள் X_2,X_2 என்பவற்றிற்கு குறிக்கப்படுகின்றது. படத்திலுள்ளவாறு மீடிறன் வளையியிற்கும் X – அச்சுடன் X இன் இப்பெறுமானங்களுக்குமிடைப்பட்ட பரப்பானது இப்பெறுமானங்களுக்கு இடையேயுள்ள மீள்திறனுக்கு விகித சமமாக இருக்கும்.

திரட்சி மீடிறன். [Cumulative Frequency]

இது இரு வகைப்படும்.

1. திரட்சி மீடிறன் கூடியது
2. திரட்சி மீடிறன் குறைந்தது.

மீள்திறன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஒரு மாறியானது எடுக்கும் பெறுமானத்திலும் குறைந்த பெறுமானங்கள் அல்லது கூடிய பெறுமானங்களை எத்தனை அலகுகள் எடுக்கின்றன என்பதை நாம் அறிவது அவசியமாகும். தரப்பட்ட ஒரு பெறுமானத்திலும் பார்க்க குறைந்த பெறுமானத்தை எடுக்கும் அலகுகளின் தொகை காட்டும் மீடிறன் ஆனது திரட்சி மீடிறன் குறைந்தது எனப்படும் இவ்வாறே தரப்பட்ட ஒரு பெறுமானத்திலும் பார்க்கக்கூடிய பெறுமானத்தை எடுக்கும் அலகுகளின் தொகை காட்டும் மீடிறனானது திரட்சி மீடிறன் கூடியது என்று கொள்ளப்படும்.

உதாரணம் :

(1) பின்னகமாறி

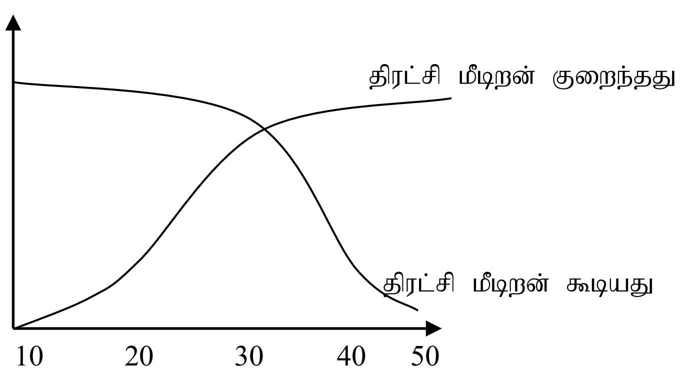
X	F	திரட்சி மீடிறன் குறைந்தது	திரட்சி மீடிறன்கூடியது
0	5	5	17
1	6	11	12
2	3	14	6
3	2	16	3
4	1	17	1

(2) தொடர்மாறி

வகுப்பாயிடை	F	திரட்சி மீடிறன் குறைந்தது	திரட்சி மீடிறன்கூடியது
0-10	2	5	32
10 -20	7	11	30
20-30	11	14	23
30-40	9	16	12
40-50	3	17	3

X ஆனது 40 இலும் குறைந்த பெறுமானத்தை எடுக்கும் மீடிறன் ஆனது 29 எனவும் X ஆனது 20 இலும் கூடிய பெறுமானத்தை எடுக்கும் மீடிறன் ஆனது 12 எனவும் அறிவோம்.

திரட்சி மீடிறன் வரைபடம்

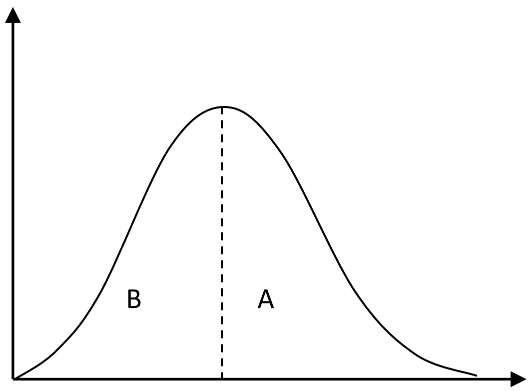


தொடர்ச்சியான மாதிரிக்கு திரட்சி மீடிறன் குறைந்த வரைபடம் கீறும் போது வகுப்பிடைகளின் மேல் நிலைகளைக் கருதி அம்மேல்நிலைகளுக்கு மேலே அவற்றிற்குரிய திரட்சி மீடிறன் குறைந்த பெறுமானங்களைக் குறித்தல் வேண்டும்.

இவ்வாறே திரட்சி மீடிறன் கூடிய வரைபைக் கீறும் போது வகுப்பிடைகளின் கீழ் நிலைகளைக் கருதி, அவற்றிற்கு மேலே அவற்றிற்குரிய திரட்சி மீடிறன் கூடிய பெறுமானங்களைக் குறித்தல் வேண்டும். திரட்சி மீடிறன் கூடிய வரைபும் திரட்சி மீடிறன் குறைந்ாத வரையும் ஒரே வரைதாளில்

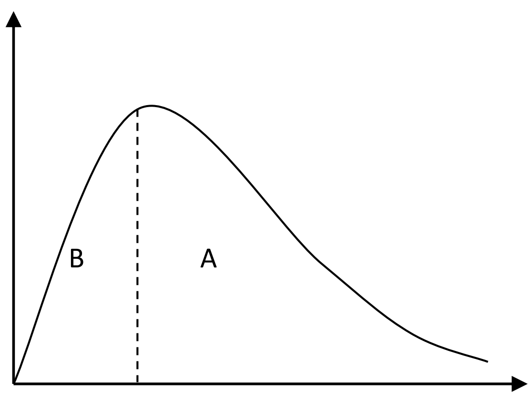
மீள்திறன் வளையியின் வகைகள்

1. சமச்சீரான மீள்திறன் வளையி [Symmetrical Frequency Curve]



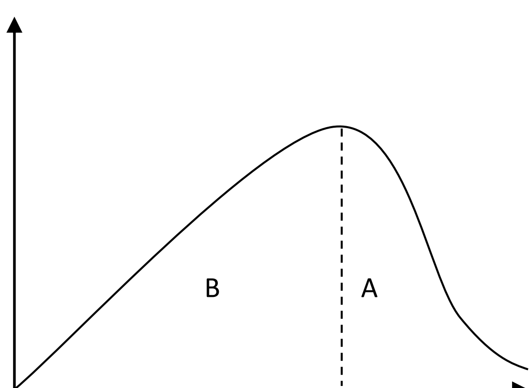
பரப்பில் A=B

2. நேர் ஓராய மீள்திறன் வளையி [Positive skew frequency curve]



பரப்பில் A>B

3. எதிர் ஓராய மீள்திறன் வளையி [negative skew Frequency Curve]



பரப்பில் B>A

மேற்கூறிய மூன்று வகைகளுமே முக்கியமானதாகும்.

Unit I

இடம் பற்றிய அளவை [Measures of Lacation]

அல்லது மைய நாட்ட அளவைகள் [Measures of Central tendency]

ஒரு பரம்பலின் ஒரு மாறியானது எடுக்கும் பெறுமானங்களைப் பிரதிபலிக்கக்கூடியதாக [Representative] ஒரு தனிப்பெறுமானம் காணக்கூடியதாக இருப்பின், அத்தனிப்பெறுமானம் இடம் பற்றிய அளவைகள் அல்லது மையநாட்ட அளவைகள் எனப்படும்.

ஒரு பரம்பலைப் பிரதிபலிக்கக்கூடிய இடம் பற்றிய அளவைகள் பலவகைகள் உண்டு. அவையாவன

(1) கூட்டலிடை [Arithmetic mean]

(2) பெருக்கலிடை [Geometic mean]

(3) இசையிடை [Harmonic mean]

(4) இடையம் அல்லது மையம் [Median]

(5) ஆகாரம் அல்லது முகடு [Mode]

(1) கூட்டலிடை [Arithmetic mean]

ஒரு மாறி X ஆனது எடுக்கும் பெறுமானங்கள் ஆயின் அப்பரம்பலின் கூட்டலிடை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{xi}{n}$$

X ஆனது x_1 எனும் பெறுமானத்தை f_1 தரம் எடுக்குமாயின்

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ...f_nx_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fixi}{\sum fi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fixi}{N}$$

இங்கு $N\sum_{i=1}^{n} fi$ ஆனது, மொத்த மீடிறன்களைக் குறிக்கின்றது.

உதாரணம் :

கம்பனி ஒன்றிலே பணியாற்றுகின்ற 50 வேலையாட்களது வாராந்த வருமானம் கீழ்க்காட்டப்பட்டுள்ள மீடிறன் பரம்பலிலே தரப்படுகின்றதெனின் தொழிலாளர்களின் வாராந்த வருமானம் யாது?

வாராந்த வருமானம் X	வேலைநாட்களின் எண்ணிக்கை F	fx
55	4	220
65	8	550
75	15	1125
90	10	900
110	6	660
135	4	540
165	3	495
	f = 50	Fx = 4460

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} \frac{4460}{50} = 89.2$$

எனவே வேலையாட்கள் 89.2 ரூபாவினை, சராசரி வருமானமாகப் பெறுகின்றார்கள்

தொடர்ச்சியான மாறியாயின் செய்கை வருமாறு அமையும்.

வகுப்பாயிடை	மீடிறன் F	வகுப்பிடையின் வகுப்புப் பெறுமானம் x	fx
$a_0 - a_1$	f_1	$x_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}$	f_1x_1
$a_0 - a_1$	f_2	$x_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}$	f_2x_2
$a_0 - a_1$	f_3	$x_3 = \frac{a_2 + a_3}{2}$	f_3x_3
$a_0 - a_1$	f_4	$x_1 = \frac{a_3 + a_4}{2}$	f_4x_4
…..	……		……
…..	…...		……
….	…..		……
$a_n - 1^{-a}n$	f_n	$x_n = \frac{a_n - 1 + a_n}{2}$	f_nx_n

$$xi = \frac{a_{i-1} + a_1}{2} (i = 1,2,3,.........n)$$

∴ கூட்டலிடை $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fixi}{\sum_{i=1}^{n} fi} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i - 1 + a}{2} \right)}{\sum_{i=1}^{n} fi}$

வகுப்பாயிடை	மீடிறன் F	வகுப்பிடையின் வகுப்புப் பெறுமானம் x	fx
75-85	15	80	1200
85-95	25	90	2250
95-105	4	100	4000
105-115	108	110	11880
115-125	92	120	11040
125- 135	20	130	2600
	300	630	32970

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{32970}{300} = 109.4$$

இலகுவான முறையில் கூட்டலிடையைக் கணித்தல்

உற்பத்தி மாற்றம் அல்லது அளவின் தொடக்க நிலை மாற்றம்

பூச்சியத்தினை ஆரம்பப் புள்ளியாகக் கொண்ட x,y என்ற இரு கிடை, நிலைக்குத்து அச்சுக்களை எடுத்துக் கொள்க. அளவின் தொடக்க நிலையை கிடைவீச்சு A ஆக உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு மாற்றின், பரம்பலின் கூட்டலிடையானது A அலகுகளினால் மாற்றமடையும் தொடக்கநிலை பூச்சியமாவுள்ள போது,

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$ அளவின் தொடக்க நிலை A என்ற புள்ளிக்குப் படத்தில் காட்டியவாறு மாற்றப்படின், மாறி எடுக்கும் ஒவ்வொரு பெறுமானமும் A இனால் குறைக்கப்பட வேண்டும்.

அதாவது $\bar{x} - A = \frac{\sum f(x-A)}{\sum f}$ $\bar{x} = A + \frac{\sum f(x-A)}{\sum f}$ $x - A = d$ என எடுப்பின்.

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n} \quad \bar{x} = A + \bar{d}$$

$\therefore$ N=Σf

அதாவது A என்ற உத்தேச இடை (மதிப்பிடை எடுகொண்ட இடை, நோக்கிய இடை, தற்காலிக இடை) ஒன்றைத் தெரிவு செய்தல் வேண்டும். அந்நிலையில் யாதுமொரு மாறி d_1 ஆனது.

di =x_1 –A ஆல் வரையறுக்கப்படும். $xi = A + di \sum_{i=1}^{n} xi = \sum_{i=1}^{n} A + \sum_{i=1}^{n} di$

$\sum_{i=1}^{n} xi = AN + \sum_{i=1}^{n} diN$ ஆல் இருபுறமும் வகுக்க. $\frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{N} = \frac{AN}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{n} di}{N}$ $\bar{x} = A + d$

உண்மை இடை = உத்தேச இடை+ விலகல் இடை

மதிப்பிடையானது கணித்தலை இலகுபடுத்தும் நோக்குடன் எடுக்கப்படுகின்றதே தவிர, அதற்கென குறிப்பிட்ட விதிகளோ அன்றிக் கணித ரீதியான விளக்கங்களோ கிடையாது.

உதாரணம்

முன்னுள்ள உதாரணத்தைக் கவனிக்க.

வகுப்புப் பெறுமானம் X	F	Di = Xi - A	Fdi
80	15	-30	-450
90	25	-20	-500
100	40	-10	-400
110	108	0	0
120	92	10	920
130	20	20	400
	∑ f = 300		∑ fdi = 30

A=110 எனத் தெரிக $\bar{x} = A + d$ இல் $\bar{x} = 110 + \frac{\sum fd}{N} = 110 + \frac{(-30)}{+300} = 110 + (-01) = 109.9$

மேலும் இலகுவாகக் கணிப்பதற்கு $di = \frac{xi - A}{c}$ என்றவாறு ஒரு மாறிலியைத் தெரிதல் வேண்டும் இங்கு C ஆனது வகுப்பின் பருமன் அல்லது வகுப்பின் வீச்சுக்கள் யாதுமொரு எண்ணால் வகுபடுமாயின் அவ்வெண் ஆக அமையும்.

$di = \frac{xi - A}{c} \sum cdi = \sum xi - \sum A \ \sum_{i=1}^{n} cdi = \sum_{i=1}^{n} xi - \sum_{i=1}^{n} A$ N ஆல் இருபுறமும் வகுக்க.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} cdi}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{n} A}{N} cd = \bar{x} = A + c\bar{d}$$

உதாரணம்

முன்னுள்ள உதாரணத்தைக் கவனிக்க. C= 10 எனத் தெரிக.

வகுப்புப் பெறுமானம் X	F	Di = Xi - A	Fdi
80	15	-30	-450
90	25	-20	-500
100	40	-10	-400
110	108	0	0
120	92	10	920
130	20	20	400
	f = 300		fdi = -3

$\bar{x} = A + cd$ இல் $\bar{x} = 110 + \frac{(10)(-3)}{300} = 110 + 0.1 = 109.9$

உதாரணம்

வகுப்பொன்றின் மாணவர்கள், கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகளுக்கான பரம்பலை அட்டவணை தரப்பட்டுள்ளது. சராசரியாக, ஒரு மாணவன் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளியைக் காண்க.

முறை I

வகுப்புப் பெறுமானம் X	F	fx
53	3	159
58	5	290
63	9	567
68	11	748
73	5	365
78	5	390
83	2	166
	∑40	∑fx = 2685

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} \frac{2685}{40} = 67.12$$

முறை II

எடுகொண்ட இடையாக ஒரு மாறிலியைத் தெரிந்து செய்தல்.

வகுப்புப் பெறுமானம் X	Di=xi -A	f	Fdi
53	-15	3	-45
58	-10	5	-50
63	-5	9	-45
68	0	11	0
73	5	5	25
78	10	5	50
83	15	2	30
		∑f=40	∑fdi- 35

A = 68 எனத் தெரிக.

$F\bar{x} = A + \bar{d}$ இல் $= 68 + \frac{(-35)}{40} = 68 + (-0.875) = 67.125$

(மேற்போந்த முறையின் விடையுடன் ஒப்பிடுக)

முறை III

எடுகொண்ட இடையுடன் C என்ற மாறிலியைத் தெரிந்து செய்தல்

வகுப்புப் பெறுமானம் X	Di = xi – A/C	f	fdi
53	-3	3	- 9
58	-2	5	-10
63	-1	9	-9
68	0	11	0
73	1	5	5
78	2	5	10
83		2	6
		$\sum f=40$	$\sum fdi-7$

A = 68 C=5

முன்னர் பெற்ற விடைகளுடன் ஒப்பிடுக.

Unit II

இடையம், ஆகாரம், கணிய அணைகள் [Median, Mode, Qualities]

பரம்பலின் இடையம் அல்லது மையம் [Median]

ஒரு மாறியின் N பெறுமானங்கள் எடுக்கப்பெறும் அப்பெறுமானங்கள் ஏறுவரிசை அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப்படும்.

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq x_N$

இவ்வாறு செய்யப்படின், மையமாக அமைந்த பெறுமானத்திற்கு குறைந்த பெறுமானமுடைய மாறிகளின் தொகையும் கூடிய பெறுமானமுடைய மாறிகளின் தொகையும் சமமாக இருக்கும். N பெறுமானங்கள் இருப்பின்,

வகை I : N ஒற்றையெண் ஆயின் மையம் Md ஆனது $\frac{N}{2}+1$ ஆவது உறுப்பிற்குச் சமன்.

வகை II : N இரட்டையெண் ஆயின் மையம் Md ஆனது சமன் $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்பினதும் N/2 இனதும் சராசரிக்குச் சமன்.

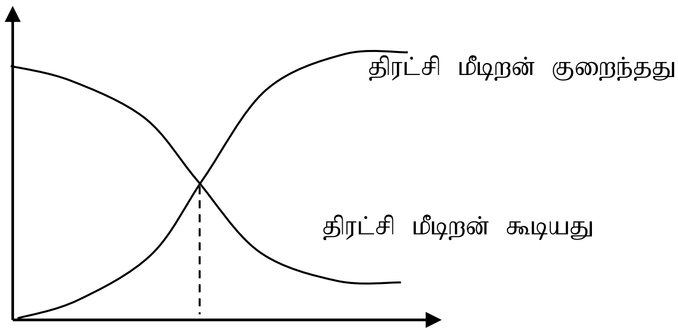
Note :

$x_N/2$, $x_N/2 + 1$ ஆகிய இரண்டும் சமனாக இருப்பின், இவ்விரண்டில் ஒன்று பரம்பலின் மையமாகும்.

$x_N/2 \leq x_N/2+1$ எனின் ½ $(x_N/2 + x_N/2+1)$ ஆனது பரம்பலின் மையமாகும். மேலும் பரம்பலின் இடையமானது மீடிறன் வளையியொன்றில் பரப்பளவை இருசம பங்காக பிரிக்கும். எந்தவொரு மீடிறன் பரம்பலுக்கும் இடையம் வரையறுக்கப்படுவதோடு, மாறி தொடர்ச்சியாயுள்ளதாயின்

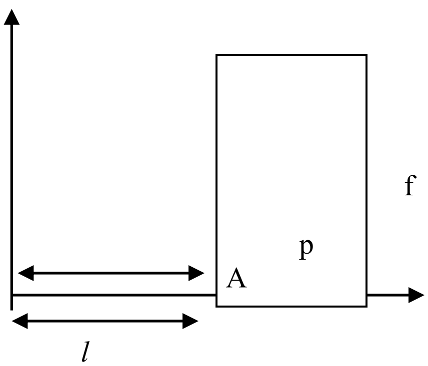
இடையம் (ஒரு – தனியானதும்) மாறி பின்னகமானதாயின் சில சமயங்களில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பெறுமானங்கள் குறிப்பிட்ட பரம்பலின் இடையமாகவும் காணப்படும்.

I. திரட்சி மீடிறன் வரைபைக் கொண்டு மையத்தைக் காணல்



இரண்டு வரைபுகளும் சந்திக்கும் புள்ளியை எடுத்தால் இவையிரண்டும் சந்திக்கும் புள்ளியின் x ஆள்கூறு, ஆயின், இலும் குறைந்த பெறுமானங்களை எடுக்கும் மாறிகளின் தொகையும் கூடிய பெறுமானங்கள் எடுக்கும் மாறிகளின் தொகையும் சமனாகும் ஆகவே, ஆனது பரம்பலின் மையமாகும்.

II. வலைவடிவ வரைபிலிருந்து மையத்தைக் காணல்.



Md = l – i/f(N/2 – C)

இங்கு,

l – மையமிருக்கும் வகுப்பின் கீழ் எல்லை

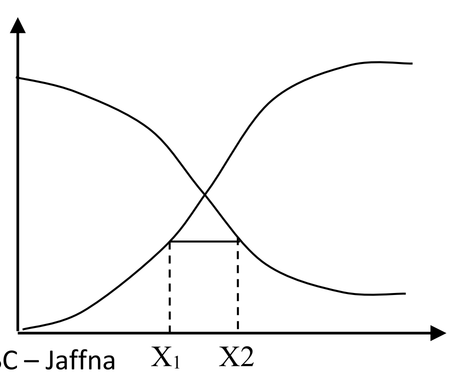
i – மையவகுப்பின் மையம்

f – மையவகுப்பின் மீடிறன்

N – மொத்த மீடிறன்

C – மையமிருக்கும் வகுப்பிற்கு முந்திய வகுப்பினதும் அதற்கு முந்திய எல்லா வகுப்புகளினதும் மொத்தத் திரட்சி மீடிறன் ஆகும்.

பொதுவாக திரட்சி மீடிறன் குறைந்த, கூடிய வரைபிலிருந்து பெறப்படும் மையப்பெறுமானம் வேறாக இருப்பின் இவற்றின் கூட்டலிடை, மையமாக்க கொள்ளப்படும்.



இடையம் $\frac{x_1 + x_2}{2}$

இடையம் காணுவதற்கான ஏகபரிமாண இடைச்செருகல் முறை [Liner Interpollation]

உதாரணம்.

குறித்த வகுப்பு மாணவர்களின் கணிதப்புள்ளி பற்றிய விபரம்

வகுப்பாயிடை	f	Cf
51-55	3	3
56-60	5	8
61- 65	9	17
66 – 70	11	28
71 – 75	5	33
76 - 80	2	38
		35

வகுப்புக்களைத் தொடர்ச்சியாக்கல் மூலம்

வகுப்பாயிடை	f	Cf
50.5-55.5	3	3
56.5 -60.5	5	8
61.5 - 65.5	9	17
66.5 – 70.5	11	28
71.5 – 75.5	5	33
76 .5– 80.5	2	38
	35	35

முறை I

புள்ளிவிபரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கையில் அதற்கான இடையம் N/2 ஆவது மீடிறன் குறிக்கும் ஈட்டால் தரப்படும். அதாவது இடையம் 20 ஆவது நிலையத்தைப் பெறுகின்றது. [50.5 – 65.5] என்ற வகுப்புவரையுள்ள புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 17 ஆகும்.

[50.5 – 70.5] என்ற வகுப்புவரையுள்ள புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 28 ஆகும். [65.5 – 70.5 என்ற வகுப்பினுள்ளே அடக்கப்படுவர் ஆனால் இவ்வகுப்பிற்குரிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 11 ஆகும். ஆவ்வகுப்பின் பருமன் 70.5 – 65.5 = 5 ஆகையால்இவ்வகுப்பின் - ஆவது நிலையிலுள்ள புள்ளி இடையமாக அமையும்.

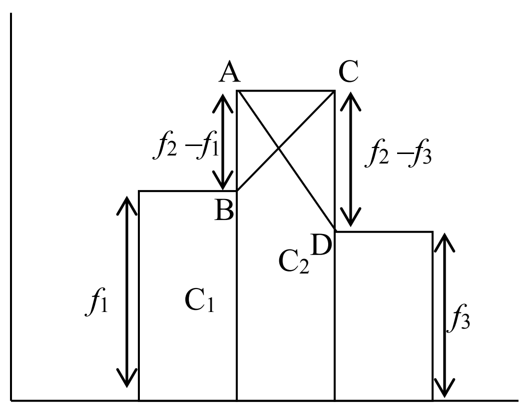
முறை II

வாய்பாட்டைப் பிரயோகிப்பின்.

ஆகாரம் /முகடு [Mode]

மிக உயர்ந்த மீடிறனுடைய மாறிகள் பெறுமானம் முகடு அல்லது ஆகாரம் எனப்படும்.

வலையுரு வலையத்திலிருந்து ஆகாரத்திற்கான கோவை பெறுதல்.



C_2 என்ற வகுப்பில் ஆகாரம் உள்ளதென்க. இதற்கு முந்திய வகுப்பு C_1 எனவும் பிந்திய C_2 எனவும் கொள்க.

l- மிகவுயர்ந்த மீடிறன் உள்ள வகுப்பு C_2 இன் கீழ் எல்லை L

f_2 மிகவுயர்ந்த மீடிறன் உள்ள வகுப்பு C_2 இன் மீடிறன்.

ஆகாரம் $M = l + \dfrac{i(f_2 - f_1)}{2f_2 - f_1 - f_3}$ ஆகும்.

வகுப்பாயிடை	f	Cf
20-40	6	6
40-60	9	15
60-80	11	26
80-100	14	40
100-120	20	60
120-140	15	75
140-160	8	93
160-180	7	100
180-200		

மேற்கூறிய பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் காண்க.

ஆகாரம் $M = l + \frac{i(f_2 - f_1)}{(2f_2 - f_1 - f_3)} = 100 + \frac{20(20-14)}{2\times 20 - 14 - 15} = 100 + 10.9 = 110.9$

கணிய அணைகள் [Quartiles]

ஒரு மீடிறன் பரம்பலைச் சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் கணிய அணைகள் எனப்படும்.

1. காலணைகள் [Quartiles]
2. தச அணைகள் [Deciles]
3. சத அணைகள் [Perceniles]

காலணைகள் [Quartiles]

மீடிறன் பரம்பலை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் காலணைகள் எனப்படும். இது Q_1 ஆல் குறிக்கப்படும்.

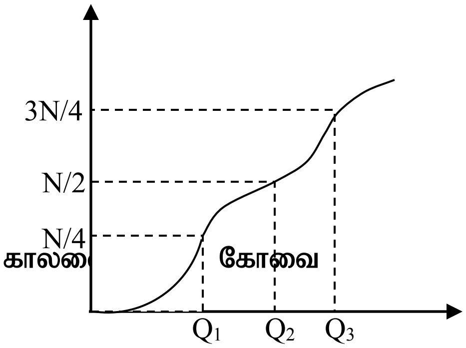
(i =1,2,3………………..)

Q_1 – முதலாம் காலணை

Q_2 - இரண்டாம் காலணை

Q_3 - மூன்றாம் காலணை.

கணிய அணைகளைத் திரள்மீடிறன் வரைபிலிருந்து பெறும் முறை.



$$D_r = l + \frac{i}{f}\left(\frac{rN}{4} - C\right)$$

l - Qr உள்ள வகுப்பின் கீழ் எல்லை.

i – வகுப்பின் அகலம் (வகுப்பின் பருமன்)

r – Qr உள்ள வகுப்பின் மீடிறன்

N- மொத்த மீடிறன்

C-Qr உள்ள வகுப்பின் முந்திய வகுப்புக்களின் மீடிறன்.

தச அணைக்கான கோவை

$$D_r = l + \frac{i}{f}\left(\frac{rN}{f} - C\right)$$

l - Dr உள்ள வகுப்பின் கீழ் எல்லை.

i – வகுப்பின்கலம் (வகுப்பின் பருமன்)

r –Dr உள்ள வகுப்பின் மீடிறன்

N- மொத்த மீடிறன்

C-Dr உள்ள வகுப்பின் முந்திய வகுப்புக்களின் மீடிறன்.

தச அணை என்பது ஒரு மீடிறன் பரம்பலை 10 சம பங்காகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் ஆகும்.

சத அணைக்கான கோவை

$$P_r = l + \frac{i}{f}\left(r\frac{N}{100} - C\right)$$

இங்கு

l - Pr உள்ள வகுப்பின் கீழ் எல்லை.

i – வகுப்பின்கலம் (வகுப்பின் பருமன்)

F –Pr உள்ள வகுப்பின் மீடிறன்

N- மொத்த மீடிறன்

C- Pr உள்ள வகுப்பின் முந்திய வகுப்புக்களின் மீடிறன்.

சத அணை என்பது ஒரு மீடிறன் பரம்பலை 100 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் ஆகும்.

தொடர்பு : $Q_1 = P_{25}$, $Q_2 = P_{50} = D_S$ =Median, $Q_3 = P_{75}$

Note:

இடை, மையம், ஆகாரம் என்பவற்றுள் பயனள்ள அளவை எது என்பதையும், இவற்றிடையே எதாவது தொடர்பு உள்ளனவா என்பதையும் ஆராய்தல்.

கணித முறையில் இதை நிறுவக்கூடியதாக இவற்றிடையே எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லை. ஆனால் இவற்றிடையே பின்வரும் மாறாத தொடர்புகள் காணப்படும்.

இடை – ஆகாரம் = 3(இடை –மையம்)

இடை, ஆகாரம் மையம் ஆகியவற்றில் பரவலாக உபயோகிக்கப்படுவது இடையேயாகும். இதற்கான காரணங்கள் வருமாறு.

1. இலகுவில் கணிக்கப்படக்கூடியது.
2. பரிசோதனைக்கான அலகுகளைத் தெரிவு செய்யும் போது ஏற்படும் பிழைகளால் மையத்தைவிட, இடை குறைவான பாதிப்பையே கொண்டது.
3. மையம் இலகுவில் கணிக்கப்படக்கூடியதாயினும் தொடர்ச்சியற்ற பரம்பலின் மையம் நம்பத்தகுந்த அளவையல்ல. மேலும் மாறிகளின் கூட்டுத்தொகை அல்லது வித்தியாசங்களின் பரம்பலின் மையங்கள் முறையே தனித்தனி பரம்பல்களின் மையங்களின் கூட்டுத்தொகையாகவோ அன்றி வித்தியாசமாவோ இருக்கவேண்டியதில்லை.
4. ஆகாரம் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட போதும் குறைந்தளவு பெறுமானங்களைக் கொண்டு சரியாக நிர்ணயிக்க முடியாது.

கூட்டலிடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றை ஒப்பிடல்.

1. ஒரு மாறியின் கூட்டலிடை காண்பதற்கு அது எடுக்கும் பெறுமதிகள் யாவும் தரப்படல் வேண்டும்.
2. மாறி எடுக்கும் பெறுமானங்களில் மிகக் குறைந்த பெறுமானங்கள் அல்லது கூடிய பெறுமானங்கள் அதன் கூட்டலிடையை பாதிக்கும்.

உதாரணம் 1:
தொழிற்காலையில் சம்பளம் பெறும் பட்டியல்

சம்பளம் ரூபாவில்	எண்ணிக்கை	மொத்தம்
300	10	3000
325	10	3250
350	10	3500
1200	5	6000
	35	15750

சராசரி சம்பளம் $= \dfrac{15750}{35} = 450/=$

இங்கு வேலை செய்யும் 35 பேரில் 30 பேர்களின் சம்பளம் 300-350 இற்கு இடையிலுள்ளதாயிருந்தும் சராசரி சம்பளம் 450/= என்னும் முடிவை நாம் பெறக்கூடியதாயுள்ளது. இது சரியான முடிவல்ல.

1. ஒரு பின்னகமாறியின் கூட்டலிடையானது எப்பொழுதும் நடைமுறையில் சாத்தியமான பெறுமானத்தைக் கொடுப்பதாக இருக்கமாட்டாது.
2. உதாரணம் 2:

வகுப்பு	மாணவர்தொகை
A	50
B	55
C	54
D	56
	215

சராசரி $= \frac{215}{4} = 53.75$

இதிலிருந்து ஒரு வகுப்பின் சராசரிஎ ண்ணிக்கை 53075 எனப் பெறக்கூடியதாய் உள்ளது. இது நடைமுறையில் சாத்தியமானதல்ல.

இடையம்

1. பரம்பலின் இடையத்தைக் காணும் பொது மாறி எடுக்கும் மிகக் கூடிய மிகக்குறைந்த பெறுமானங்கள் அப்பரம்பலின் மையத்தைப் பாதிக்கமாட்டாது. உதாரணம் 1 இல் தொழிற்சாலையில் வேலை செய்பவர்களின் சம்பளங்களின் இடையம் 325/=

   (இடையத்தின் நிலை $= \frac{35+1}{2} = 18$
2. ஒரு மாறியானது எடுக்கும் மிகக்கூடிய குறைந்த பெறுமானங்கள் தெரியாதபோதும் இடையம் காணக்கூடியதாக உள்ளது.

உதாரணம்

சம்பளம்	எண்ணிக்கை
300	5
325	10
350	12
375	9
…….	…….
…….	…….
…….	…….
…….	…….
	40

இவ்வட்டவணையில் இங்கு வேலை செய்யும் 40 பேரில் 36 பேரின் சம்பளங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. மிகுதி 4 பேரும் மிகக்கூடிய சம்பளத்தைப் பெறக்கூடியவர்களாக இருப்பார்களாயின் அவர்களின் சம்பளங்களினது பெறுமானங்கள் தரப்படாது இருந்த போது இந்தப் பரம்பலின் இடையம் 350∴- எனத்தரப்படாது பெறக்கூடியதாயுள்ளது (இடையம் $= \frac{40}{2} = 20$)

ஆகாரம்.

இடையத்தைப் போற்று ஆகாரமும் பரம்பலின் ஒரு தனிப்பெறுமானமாக இருக்கும் மாறி எடுக்கும் பெறுமானங்கள் யாவும் தரப்பட்டுள்ள போது ஆகாரத்தைத் திருத்தமாகக் கணிக்கலாம்.

உதாரணம்.

வகுப்பாயிடை	f	திரள் மீறன்
0-5	2	3
5-10	10	12
10-15	16	28
15-20	25	53
20-25	24	77
25-30	9	86
30-35	10	96
35-40	5	101
	101	

மேற்பட்ட பரம்பலின் $Q_1, Q_2, Q_3, D_7 P_{55}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$Q_1 = 1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C\right) = 10 + \tfrac{5}{16}\left(\frac{101}{4} - 12\right) = 14.14$$

$$Q_2 = 1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right) = 15 + \tfrac{5}{25}\left(\frac{101}{2} - 12\right) = 19.5$$

$$Q_3 = 1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right) = 20 + \tfrac{5}{24}\left(\frac{3 \times 101}{2} - 53\right) = 24.74$$

$$D_7 = 1 + \frac{i}{f}\left(\frac{7N}{10} - C\right) = 5 + \tfrac{5}{10}\left(\frac{7 \times 10}{10} - 2\right) = 39.05$$

$$P_{55} = 1 + \frac{i}{f}\left(\frac{55N}{100} - C\right) = 0 + \tfrac{5}{2}\left(\frac{55 \times 101}{100} - 0\right) = 138.875$$

Unit III

விலகல் அளவைகள் [Measures of dispersion]

தரப்பட்ட ஒரு சராசரிப் பெறுமானத்தை இட்டு மாறிகளின் பெறுமானங்கள் விலகியிருக்கும் தன்மையைக் கணிக்கும் முறை விலகல் அளவைகள் எனப்படும்.

1. வீச்சம் [Range]

2. இடைவிலகல் [Mean Deviation]
3. காலணை இடைவீச்சு [Inter Range]
4. நியம வியம விலகல் [Standard Deviation]

(1) வீச்சம் [Range]

தரப்பட்ட பெறுமதிகளின் மிகக் குறைந்த பெறுமதிக்கும், மிகக்கூடிய பெறுமதிக்கும் இடைப்பட்ட வித்தியாசம் ஆகும்.

(2) இடைவிலகல் [Mean Deviation]

தரப்பட்ட பரம்பலின் இடை ஆக இருப்பின் இடைவிலகல் δ எனின், $\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_1 - \bar{x}|}{N}$ ஆகும்.

இங்கு N- மொத்த மீடிறன்

Xi – பெறுமானம்

$\bar{x}$ - இடை $\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n}[|xi - \bar{x}|]}{\sum fi}$ இதில் xi வகுப்புப் பெறுமானம்.

Note :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} fi(xi - \bar{x})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{N} - \frac{N\bar{x}}{N} = X - \bar{X}\left(\because \frac{\sum xi}{N}\right) = \bar{x} = 0$$

(3) காலணை இடைவீச்சு [Inter Range]

Q_1, Q_2 என்பன முதலாம், மூன்றாம் காலணைகளாயின் $Q_3 - Q_1$ என்பது காலண வீச்சு எனப்படும் இது விலகலுக்கு ஓர் அளவாகக் கொள்ளப்படும்.

P_{10}, P_{90} என்பன முறையே பத்தாம், தொண்ணூறாம் சத அணைகள் எனின் P_{90}-P_{10} என்பன சத அணை இடைவீச்சாகும்.

II அரைக்காலணை இடைவீச்சு $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

(4) நியம வியம விலகல் [Standard Deviation]

x_1, x_2 ………x_n என்பன n பெறுமானங்களாகும் பரம்பலின் நியம விலகல் S ஆனது

$S^2 = \dfrac{\sum fi(xi-\bar{x})^2}{\sum fi}$ எனவரையறுக்கப்படும் இங்கு $\bar{x}$ இடை.

Note :-

மாறற்றின் என்பது, நியம விலகலின் வர்க்கம் ஆகும்.

நியம விலகலைக் கணித்தலுக்கான இலகுவான முறை

$$S^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{x})^2}{\sum fi} S^2 = \frac{\sum fi(xi-\bar{x})^2}{N}\left(\because \sum fi = N\right) = \tfrac{1}{N}\sum fi(2xi\bar{x}+\bar{x}^2)$$

$$= \frac{\sum fixi^2}{N} - \tfrac{2\bar{x}}{N}\sum fixi + \tfrac{\bar{x}^2}{N}\sum fi = \frac{\sum fixi^2}{N} - 2\bar{x}.\bar{x} + \bar{x}^2\left[\sum fi = N\right] S^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$\therefore S = \sqrt{\frac{\sum fixi^2}{N} - \left(\frac{\sum fixi}{N}\right)^2}$$

மேலும் இலகுவாக்கல் - அலகுமாற்றத்தின் மூலம் (மாறியை மாற்றுவதன் மூலம்) நியம விலகலைக் காணல்.

di =xi –A (முன்பு பார்த்துள்ளோம்)

xi = di +A $S^2 = \dfrac{\sum fi(xi-\bar{x})^2}{N} \dfrac{1}{N}\sum fi(di + A - (A+\bar{d}))^2 \left(\because \bar{x} = A + \bar{d}\right)$

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum fi(di-\bar{d})^2 S^2 = \frac{\sum fidi^2}{N} - \left(\frac{\sum fidi}{N}\right)^2 S = \sqrt{\frac{\sum fidi^2}{N} - \left(\frac{\sum fidi}{N}\right)^2}$$

மேலும் $di = \dfrac{xi - A}{C}$ என்றவாறு ஒரு மாறியைத் தெரிவு செய்யின்

Cdi = xi –A xi = A + Cdi $\bar{x}$ =A +C$\bar{d}$ இனி $S^2 = \dfrac{\sum fi(xi-\bar{x})^2}{}$

$$= \frac{1}{N}\sum fi\left[(A+Cdi)-(A+C\bar{d}\right]^2 = \frac{1}{N}\sum fi\left(C(di-\bar{d})\right)^2 = \frac{C^2}{N}\sum fi(di-\bar{d})^2$$

$$S^2 = \frac{C^2}{N}\left(\sum fidi^2 - (\sum fidi)^2\right) \because S = C\sqrt{\frac{\sum fidi^2}{N} - \left(\frac{\sum fidi}{N}\right)^2}$$

உதாரணம்

கீழே தரப்பட்டுள்ள மீடிறன் பரம்பல் குறித்த வகுப்பு மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. இப்பரம்பலின் நியமவிலகலைக் காண்க.

வகுப்பு	மீடிறன் f
30-39	4
40-49	6
50-59	9
60-69	12
70-79	8
80-89	7
90-99	4
	50

வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $S = \sqrt{\dfrac{\sum fi(xi - \bar{x})^2}{\sum fi}}$ ஆகும்.

Method I

நேரடியாக வரைவிலக்கணத்திலிருந்து கணித்தல்.

வ.ந.வெ. x	f	fx
34.5	4	138.0
44.5	6	267.0
54.5	9	490.5
64.5	12	774.0
74.5	8	596.0
84.5	7	591.5
94.5	4	378.0
	$\sum f = 50$	$\sum f\,x = 3235.0$

இடை $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{3235}{50} = 64.7$ நியம விலகல் $S = \sqrt{\dfrac{\sum fi(xi - \bar{x})^2}{\sum fi}}$

$(xi - \bar{x})$	$fi(xi - \bar{x})^2$
-30.2	3648.16
-20.2	2448.24
-10.2	936.36
-0.2	0.48
+9.8	768.32
+19.8	2744.28
+29.8	3552.16
	14098.00

$$S^2 = \frac{\sum fi(xi - \bar{x})^2}{\sum fi} = \frac{14098}{50} = 281.16 S = 16.79$$

Note:

xi, $\bar{x}$ என்பன முழு எண்களாக அமைந்து காணப்படின் நியம விலகலைக் கணிக்க.

$S = \sqrt{\frac{\sum fi(xi - \bar{x})^2}{N}}$ என்பதை நேரடியாகப் பயன்படுத்தலாம்.

Method II

$$S = \sqrt{\frac{\sum fixi^2}{N} - \left(\frac{\sum fixi}{N}\right)^2}$$

எனும் வாய்ப்பாட்டை நேரடியாகப் பயன்படுத்தல்

x	*f*	*fx*	*fx*^{2}
34.5	4	138.0	4761.00
44.5	6	267.0	11881.50
54.5	9	490.5	26732.25
64.5	12	774.0	49923.00
74.5	8	596.0	44402.00
84.5	7	591.5	49981.75
94.5	4	378.0	35721.00
			223402.50

வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$FS = \sqrt{\frac{223402.5 - 4186.09}{50} S = 281.96 S = 16.79}$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

Method III

$$S = \sqrt{\frac{\sum fidi^2}{N} - \left(\frac{\sum fidi}{N}\right)^2}$$

இணைப்பயன்படுத்தல்

வகு.த.பெ. x	*f*	*f*	*fd*	d^2	*Fd*^{2}
34.5	-30	4	-120	900	3600
44.5	-20	6	-120	400	2400
54.5	-10	9	-90	100	900
64.5	0	12	0	00	00
74.5	10	8	80	100	800
84.5	20	7	140	400	2800
94.5	30	4	120	900	3600
		50	10		14100

வாய்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$S = \frac{14100}{50} - \left(\frac{10}{50}\right)^2 = 282 - 0.04 = 281.96 = 16.79$$ (முன்னர் பெற்ற விடையடன் ஒப்பிடுக)

Method IV

$$S = C\sqrt{\frac{\sum fidi^2}{N} - \left(\frac{\sum fidi}{N}\right)^2}$$

எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தல்

C=10 எனத் தெரிக.

வகு.த.பெ. x	f	$\frac{x-64.5}{10}$	fd	d^2	Fd^2
34.5	-30	-3	-12	900	36
44.5	-20	-2	-12	400	24
54.5	-10	-1	-9	100	9
64.5	0	0	0	00	00
74.5	10	1	8	100	8
84.5	20	2	14	400	28
94.5	30	3	12	900	36
			1		141

வாய்ப்பாட்டின் படி

$$S = 10\frac{141}{50} - \left(\frac{1}{50}\right)^2 S = 10 \qquad 282 - 0.004 = 10281.96 = 16.79$$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

மாறற்குணகம் [Coefficient of Variation]

மாறற்குணம் CV ஆனது $\frac{s}{\bar{x}}$ என்பதால் வரையறுக்கப்படும் மாறலானது நூற்றுவீதத்தில் கொடுக்கப்படும்.

<u>**இணைக்கப்பட்ட தொகுதியினது கூட்டலிடை நியம விலகல்**</u>

X_1 என்னும் மாறியானது $x_{11}, x_{12} x_{13} \ldots\ldots, x_{1n}$ என்னும் n_1 பெறுமானங்களையும், x_2 என்னும்மாறியானது $x_{21}, x_{22}, x_{23} \ldots\ldots x_{2n2}$ எனினும் n_2 பெறுமானங்களையும் எடுக்கின்றன எனின்

x_1 இன் கூட்டலிடை $\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{11}}{n_1}$ இனாலும்

x_2 இன் கூட்டலிடை $\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{21}}{n_2}$ இனாலும் தரப்படும்.

மேற்குறிப்பிட்ட மாறிகள் குறிக்கின்ற இரு பண்புகளையும் இணைப்பதனால் பெறப்படும் தொகுதி $x_{11}, x_{12} x_{13} \ldots\ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \ldots\ldots, x_{2n2}$ என்னும் (n_1+n_2) பெறுமானங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

இதன் கூட்டலிடை $\bar{x} = \frac{x_{11} + x_{12} \ldots\ldots + x_{1n1} + x_{21} + \ldots . x_{2n2}}{n_1 + n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_1 + n_2}$ ஆனால்

$S = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = n_1 \bar{x}_1, \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = n_2 \bar{x}_2 \bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{n_1 + n_2}$ இங்கு $\bar{x}$ ஆனது புதிய இடையாகும்.

நியமவிலகல் S_1, S_2 எனின் $S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{2i} - \bar{x}_1)^2}{n_1}$ ....(1)

$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2}$ ....(2) ஆகும்

புதிய நியம விலகல் S ஆயின் $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2+n_2} (x_i - \bar{x})^2}{(n_1 + n_2)}$ ஆகும்.

$$(n_1 + n_2) S^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2+n_1} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_1} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \left(x_i - \bar{x}_1\right)^2 + \left(\bar{x}_1 - \bar{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} \left(x_i - \bar{x}_2\right) + \left(\bar{x}_2 - \bar{x}\right)^2$$

$n = \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_1}(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(\bar{x}_2 - \bar{x})^2$
$n + 2\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2 (\bar{x}_1 - \bar{x}) + 2\sum_{i=1}^{n_2}(x_i - \bar{x}_2)^2 (\bar{x}_2 - \bar{x})$ **இனி** $\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)^2 (\bar{x}_1 - \bar{x})$ **இனைத் தருக.** $= (\bar{x}_1 - \bar{x}) \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}_1)$ $(\because (\bar{x}_1 - \bar{x})$ **மாறிலி)** $(\bar{x}_1 - \bar{x}) \sum_{i=1}^{n_1} x_i - (\bar{x}_1 - \bar{x}) \sum_{i=1}^{n_1} x_1$ **ஆனால்** $\sum_{i=1}^{n_1} xi = n_1\bar{x}_1$ $\sum_{i=1}^{n_1} \bar{x}i = n_1\bar{x}_1$ $(\because \bar{x}_1$ **மாறிலி)** $=0$ $\sum_{i=1}^{n_2}(x_i - \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}) = 0$ **ஆகும்.** $(n_1 + n_2)S^2 = n_1 d_1^2 + n_1 S_1^2 + n_2 d_2^2 + n_2 S_2^2 \; - \; (R_1)$ **இங்கு** $d_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x})$ $d_2 = (\bar{x}_2 - \bar{x})$ **எனக் கொள்க.**

$$S_2 = \frac{n_1(S_1^2 + d_1^2) + n_2(S_2^2 + d_2^2)}{(n_1 + n_2)} \quad = \frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2}$$ **என்பதை ஆராய்வோம்.**

$$\frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{(n_1 + n_2)} = \frac{n_{1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2} + n_{2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}}{(n_1 + n_2)} = \frac{n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 + n_1\bar{x}^2 + n_2\bar{x}^2 - 2\bar{x}(n_1\bar{x}_1) + (n_2\bar{x}_2)}{(n_1 + n_2)}$$

ஆனால் $n_1\bar{x}_1 = \sum x1i \quad n_2\bar{x}_2 = \sum x2i \quad n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 = \sum x1i + \sum x2i = \bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{(n_1 + n_2)}$

இதனை (R_2) **இல் பிரதியிட,**

$$= \frac{n_1.d_1^2 + n_2.d_2^2}{(n_1 + n_2)} = \frac{n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 + (n_1 + n_2)\bar{x}^2 - 2(n_1 + n_2)\bar{x}^2}{(n_1 + n_2)} = \frac{n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 - (n_1 + n_2)\bar{x}^2}{(n_1 + n_2)}$$ **இதனை** R_1 **இல் பிரதியிட**

$$S^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{(n_1 + n_2)} + \frac{n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2}{(n_1 + n_2)} - \bar{x}^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{(n_1 + n_2)} + \frac{n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2}{(n_1 + n_2)} - \left(\frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{(n_1 + n_2)}\right)^2$$

$$\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{(n_1 + n_2)} + \frac{n_1\bar{x}_1^2 + n_2\bar{x}_2^2 + n_1 n_2(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)}{(n_1 + n_2)^2} - \frac{n_1^2\bar{x}_1^2 - n_2^2\bar{x}_2^2 - 2n_1 n_2(\bar{x}_1 \times \bar{x}_2)}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$S^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{(n_1 + n_2)} + \frac{n_1 n_2(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_1\bar{x}_2)}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{(n_1 + n_2)} + n_1 n_2\left(\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

உதாரணம்:

a. A,B என்னும் இரு கிராமங்களின் வருமானம் தொடர்பான தகவல்கள் வருமாறு

	A	B
மக்களின் எண்ணிக்கை	600	500
சராசரி வருமானம்	175	186
மாறற்றிறன்	100	81

i. இரு கிராமங்களினதும் மொத்த வருமானம் யாது?

ii. இரு கிராமங்களினதும் சராசரி வருமானம் யாது?

iii. ஒன்று சேர்ந்த நியம விலகல் யாது?

iv. எக்கிராமத்தில் மாறல் உயர்வாக உள்ளது?

b. மாறி ஒன்றின் 50 வாசிப்புக்களின் இடை 7.43, நியம விலகல் 0.23 பின்னர் கூடுதலாக 10 வாசிப்புக்கள் கிடைத்தன. 6.80, 7.81,7.58,7.70, 8.05, 6.98, 7.75, 7.85, 7.21, 7.40 இவற்றுடன் தொடக்க வாசிப்புக்களும் சேர்க்கப்படுமாயின் 60 வாசிப்புக்களினதும் இடை நியம விலகலைக் கணிக்க.

i. மொத்த வருமானம் = 175 x 600 + 186 x 500 = 198000/=

ii. சராசரி வருமானம் $=\frac{198000}{1100}=180/=$

iii. ஒன்று சேர்ந்த நியமவிலகல் S ஆயின் ஆகும். $S^2=\frac{n_1S_2^2}{(n_1+n_2)}+n_1+n_2\frac{(x_1-x_2)^2}{(n_1+n_2)}$

பிரதியிட $S^2=\frac{600\times100+500\times81}{1100}+\frac{500\times600(186-175)^2}{1100}\ S=\sqrt{\frac{1335}{11}=11.016}$

iv. மாறல் $S^2=CV=\frac{10}{175}\times100\%=5.75$ மாறல் உயர்வானது A என்னும் கிராமத்தில் ஆகும்.

v. ஆரம்ப 7.43 $S=0.23\bar{x}=\frac{\sum fxi}{N}$ இல் $7.43\times50=\sum fxi$ சேர்த்தபின்

$\sum fxi\, 7.43\times50+(6.80+7.81+7.58+7.70+8.05+6.90+7.75+7.85+7.21+7.40)=7.43\times50+75.13=446.64$

இடை $=\frac{446.64}{60}=7.444$ முன்னைய நியம விலகல்

S1 ஆயின் $S_2^1=\sum_{i=1}^{50}(xi-\bar{x})^2=(0.23)^2$ பின்னைய நியம விலகல் S2 ஆயின்

$S_2^2=\sum_{i=1}^{50}(xi-\bar{x})^2+(7.444-6.8)^2+(7.444-7.81)^2+$

$(7.444-7.58)^2+(7.444-7.7)^2+(7.444-8.05)^2+(7.444-6.98)^2+$

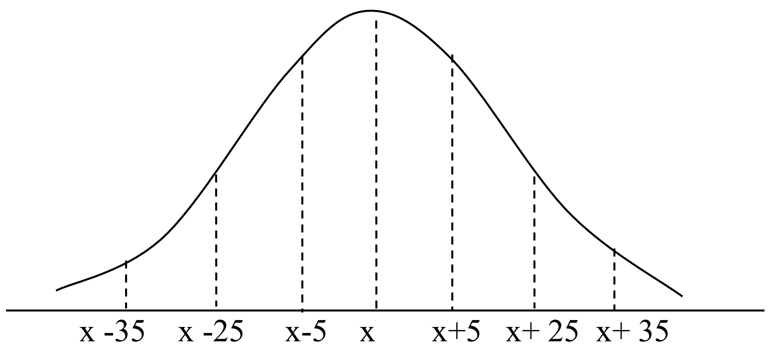
$(7.444-7.75)^2+(7.444-7.85)^2+(7.444-7.21)^2+(7.444-7.40)^2$

$=0.0529+1.530420=1.583320S_2=\sqrt{1.583320}=1.258$

Unit IV

செவ்வன் பரம்பல் Normal Distribution]

குறிப்பிட்ட பரம்பலின் மிகப் பெரிய தொகையான புள்ளிவிரபங்கள் பெறப்படின் அப்புள்ளி விபரங்களைக் கிடையச்சாகவும், மீடிறன்களை நிலைக்குத்தாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வளையியானது கீழுள்ள படத்தில் காட்டப்பட்டவாறான சமச்சீரான “மணி” போன்ற [Bell Shape] அழுத்தமான வளையியாகக் காணப்படின் அப்புள்ளி விபரம் செவ்வன் பரம்பலில் உள்ளது எனவும் இவ்வளையியினாது “செவ்வன் வளையி” [Normal Curve] எனவும் அழைக்கப்படும்.

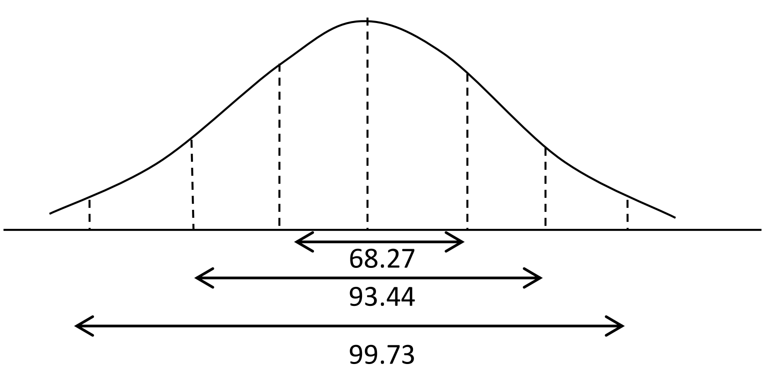


செவ்வன் வளையியின் இயல்புகள்

1. செவ்வன் வளையியைச் சமச்சீராகப் பிரிக்கும் கோடு x- அச்சை வெட்டும்புள்ளி, தரப்பட்ட புள்ளி விபரத்தின் கூட்டலிடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றைக் குறிக்கும்.
2. இவ்வளையியின் கீழ் அடைக்கப்பட்ட மொத்தப் பரப்பு, மொத்த மீடிறனுக்கு நேர்விகித சமன்.
3. எல்லாப் புள்ளி விபரங்களும் ஏறத்தாழ இடையிலிருந்து 3s இற்கும், -3s இற்கும் இடையில் அமையும்.

<u>செவ்வன் பரம்பலின் ஆயிடை வீச்சுக்கள்.</u>

<u>[Confidence Intervals of Normal Distribution]</u>



68.27%[68%]

95.44% [95%]

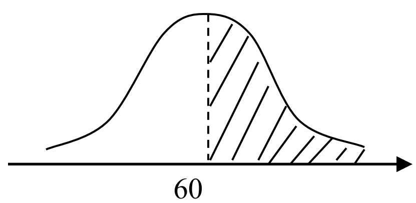
99.73%[99%]

உதாரணம்.

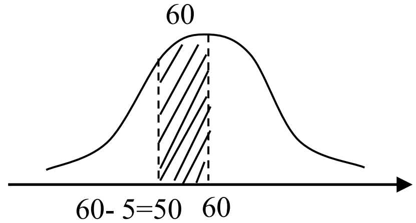
ஒரு சோதனை 10 000 மாணவர்களுக்கு நடாத்தப்பட்டது. அவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் ஏறத்தாழ செவ்வன் பரம்பலில் காணப்பட்டது. அப்புள்ளிகளின் இடை 60. நியம விலகல் 10 எனக் காணப்பட்டது.

1. 60 புள்ளிகளுக்கு மேல் எத்தனை பேர் பெற்றனர்?
2. 50 இற்கும் 60 இற்கும் இடையில் மாணவர்கள் புள்ளி பெற்றனர்?
3. 60 இற்கும் 80 இற்கும் இயைில் எத்தனை மாணவர்கள் புள்ளி பெற்றனர்?
4. 2.5% சித்தியடைய வேண்டுமாயின் வெட்டுப்புள்ளி என்ன?
5. 40 வெட்டுப்புள்ளியாயின் எத்தனை போர் சித்தியடைவர்?

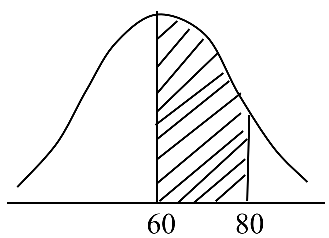
விடை



விடை 5000 பேர்

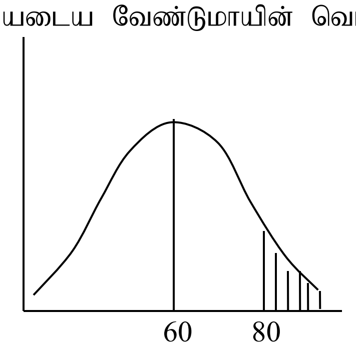


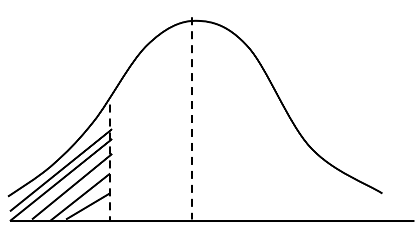
விடை 3400 பேர்



விடை 4740

விடை 2.5% சித்தியடைய வேண்டுமாயின் வெட்டுப்புள்ளி 80 ஆகும்





விடை 40 வெட்டுப்புள்ளியாயின் 7500

Zscore (Z- புள்ளி)

ஒருபரம்பலின் ஈட்டுக்கள் x_i ஆகவும், இடை, நியமவிலகல் முறையே $\bar{x}$ s ஆகவும் இருப்பின் Z புள்ளி $Z = \frac{x_1 - \bar{x}}{S}$ என வரையறுக்கப்படும்.

Eg :- இடை 60 ஆகவும் நியமவிலகல் 10 ஆகவுமுள்ள பரம்பலில் மூலம் புள்ளி 50,80 இற்குரிய Z புள்ளிகளைக்காண்க.

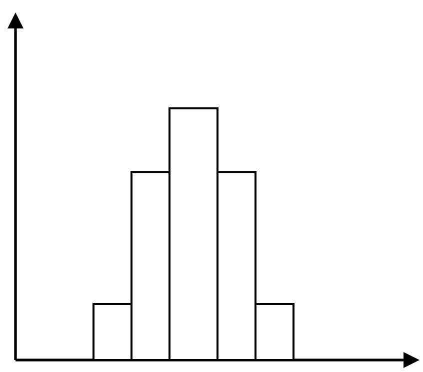
i. 50 ன் Z புள்ளி $Z = \frac{50-60}{10} = -1$

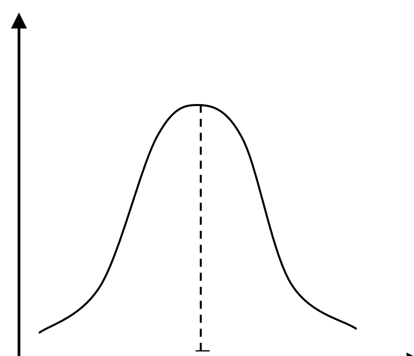
ii. 80 ன் Z புள்ளி $Z = \frac{80-60}{10} = 2$

ஓராயத்தன்மை அல்லது கோட்டம் [Skewness]

ஒரு பரம்பலை பிரதிபலிப்பதற்காக, மைய அளவைக் காணப்பயன்படுத்துகின்றோம். இவ்வாறு ஒரு மாறியினது பெறுமானம் மைய அளவிலிருந்து எவ்வளவு தூரம் விலகி உள்ளது என்பதைக் காண்பதற்கு விலகல் அளவைகளைப் பயன்படுத்துகின்றோம். இப்பொழுது ஒரு மாறியானது பரம்பலின் சமச்சீர்த் தன்மையைக் காண்பதற்கு உரிய அளவைப் பற்றியப் பார்ப்போம்.

ஒரு மீடிறன் பரம்பலுக்குரிய வலைவைடிவ வளையியில், அதன் உச்ச நிலையானது வலைவடிவ வளையியின் மையத்தின் இருபக்கங்களிலுமுள்ள பக்கங்களின் மீடிறன்கள் முறையே சமமாகவும் இருப்பின் அது சமச்சீர்ப்பரம்பல் எனப்படும்.



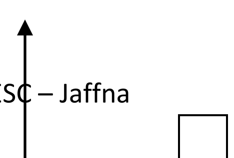


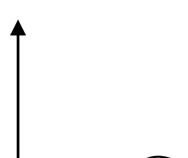
இங்கு $\bar{x} = M = Md$

இவ்விதமில்லாமல் ஒரு மாறியானது பரம்பலின் வலைவடிவ வளையியின் உச்ச நிலையானது வலைவடிவ வளையியின் இடது பக்கம் அல்லது வலது பக்கம் அமைந்திருப்பின் அது ஓராயமான பரம்பல் எனப்படும்.

நேர் ஓராயப் பரம்பல்.

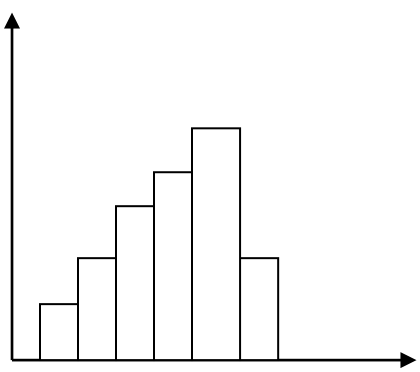
ஓர் மாறியினது மீள்திறன் பரம்பலின் வலைவடிவ வளையியின் உச்சப் பெறுமானம் அவ்வலைவடிவ வளையியின் மையத்திற்கு இடது புறம் அமைந்திருப்பின் அது நேர் ஓராயப் பரம்பலாகும்.

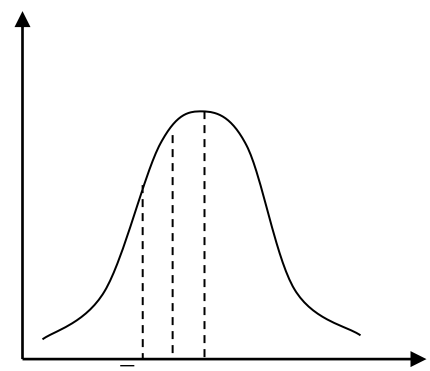




எதிர் ஓராயப் பரம்பல்

ஓர் மாறியினது மீறன் பரம்பலுக்குரிய வலைவடிவ வளையியின் உச்சநிலையானது அவ்வலைவடிவ வளையியின் மையத்திற்கு வலது புறம் அமைந்திருப்பின் அது எதிர் ஓராயப்பரம்பலாகும்.





இங்கு $\bar{x}$ Md M

$\bar{x}$ < Md < M

$$\text{ஓராயம்} = \frac{\text{இடை} - \text{ஆகாரம்}}{\text{நியம விலகல்}} = \frac{3(\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியம விலகல்}}$$

பயிற்சி

1. 2,3,6,8,11 என்னும் ஐந்து இலக்கங்களைக் கொண்ட தொகுதியொன்றில் இருந்து மீள்வைப்புடன் இரு இலக்கங்கள் எடுக்கப்படுகின்றன.
   a. தொகுதியின் இடை
   b. தொகுதியின் நியம விலகல்
   c. மாதிரிகன் ஒவ்வொன்றினதும் இடைகளுக்குரிய இடை
   d. மாதிரிகளின் இடைகளின் நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

2. வகுப்பொன்றிலுள்ள 100 மாணவர்களின் கணிதப் பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

புள்ளிகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-9	5
10-19	10

20-29	25
30-39	30
40 – 49	20
50 - 59	10

a. மாணவர்கள் பெற்ற சராசரிப் புள்ளி யாது?

b. பரம்பலுக்கு திரட்டு மீடிறன் வளையியை வரைக.

c. சித்திப்புள்ளி 40 ஆயின் சித்தியடையும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையாது?

d. மாணவர்கள் 2; 3 பங்கினர் சித்தியடையுமாறு சித்திப்புள்ளியை தீர்மானிக்க.

e. மேற்காலணை யாது?

3. U_1 என்ற கூட்ட மூலகங்கள் 3,7,9,8,U_2 என்ற கூட்ட மூலகங்கள் 2,4 ஆகும். பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

a. $\overline{U_1}$

b. $\overline{U_2}$

c. $\overline{U_1,U_2}$

d. S_{u1}

e. S_{U2}

f. S_{U1}-S_{U2}

4. மாதிரி 1: 7.4,8.8,7.5,8.1,7.8

மாதிரி 2: 6.8,7.6,8.1,7.3

மேற்காணும் மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றினதும் இடை, மாறற்றிறன், என்பவற்றைக் கணித்து, இவற்றைப் பயன்படுத்தி ஒன்றிணைக்கப்பட்ட இடை மாற்றற்றிறனைக் காண்க.

5. 9 மாணவர்களைக் கொண்ட வகுப்புகளின் இடைநிறை 35kg B என்னும் மாணவன் கூடுதலாகச் சேர்க்கப்பட்ட போது அவ்வகுப்பின் இடைநிறை 1kg ஆல் கூடுகின்றது. B இன் நிறை யாது?

11 பேரிற்கான நியம விலகலுக்கும் இடையிலான விகிதம் யாது?

6. பருத்தியாடைத் தயாரிப்பு நிறுவனம் ஒன்று 100ஊ இலுள்ள நீருனுள் மணித்தியாலத்திற்கு ஆடைகளில் ஏற்படும் கருக்கத்தை அளவிடும் நோக்கில் 3 சோதனைகள் மேற்கொள்கின்றான். ஆரைகளின் சிறிய நீண்ட கீலங்கள் நீரினுள் போடப்படுவதன் மூலம் சோதனைகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன. பெறுபேறுகள் வருமாறு.

சோதன இல	மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை	இடை (%)	நியம விலகல் (%)
1	50	2.3	0.25

2	25	2.2	0.30
3	35	2.0	0.10

110 மாதிரிகளினதும் சதவீத சுருக்கங்களின் இடை, நியம விலகல் என்பவற்றை இரு தசமதானங்களில் காண்க.

7. மல்யுத்தப் போட்டி ஒன்றில் A,B என்ற இரு வேறு நாட்டவர்கள் பங்குபற்றிப் பெற்ற பெறுபேறகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு போட்டியாளரும் பெற்ற புள்ளிகள் 0-20 என்ற வீச்சினுள் முழு எண் புள்ளிகளாக அமையும். 25 போட்டியாளர்களுக்கான இடை, நியம விலகளைக் காண்க.

	எண்ணிக்கை	இடை (புள்ளிகள்)	நியம விலகல் (புள்ளிகள்)
A	15	14.63	2.1
B	10	10.1	3.6

போட்டிக்காலத்தில் B ஐச் சேர்ந்த போட்டியாளர் ஒருவர் காயமடைந்து விட்டதால் ஏனைய 24 பேரினதும் இடை (3 தசம் தானங்களில்) நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க. காயமடைந்தவர் பெற்ற புள்ளி 2 மட்டுமேயாகும்.

8. கார் உற்பத்தி ஸ்தாபனத்தின் அறிக்கையின் படி 80 கார்களின் குறுங்கால சேவையின் காலப்பகுதி பற்றிய விபரம் வருமாறு.

Time [minute]	f
45-50	2
50-55	4
55-60	9
60-65	10
65-70	15
70-75	13
75-80	8
80-85	6
85-90	4

a. இடையை

b. நியம விலகளைக் காண்க.

9. கழுத்துப்பட்டிகள் உற்பத்தி செய்யும் ஒருவர் இளைஞர்களைக் கவரும் நோக்குடன் கழுத்துப்பட்டிகளைப் புதிய பாணியில் உற்பத்தி செய்ய உத்தேசித்துள்ளார். மாணவர்களின் மாதிரிக் கூட்டமொன்றில் அளவீடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட கழுத்தின் பகுதி பற்றிய தகவல்கள் இங்கு தரப்பட்டுள்ளன.

நடுப்பெறுமானம் x	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f
12.5	4
13.0	19
13.5	30
14.0	63
14.5	66
15.0	29
15.5	18
16.0	1
16.5	1

கழுத்துப்பட்டியின் சராசரி, நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க. அண்ணளவாக இவ்வளவுகள் செவ்வனாகப் பரம்பியுள்ளன எனக் கொண்டு அவர் தமது வாடிக்கையாளர்களின் 95% மானோர் தேவையைப் பூர்த்தி செய்வதற்கு உற்பத்தி செய்ய வேண்டிய பட்டிகளின் மிகப்பெரிய, மிகச்சிறிய அளவுகளைக் காண்க.

10. இரு கிராமங்களில் 98 குடும்பங்களின் வருமானம் பின்வருமாறு

100% அலகுகளின் மாத வருமானம்	குடும்ப எண்ணிக்கை	
	A	B
5-10	1	5
10-15	10	6
15-20	20	15
20-25	8	10
25-30	6	5
30-35	3	4
35-40	1	2
40-45	0	2
85-90	4	

இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றைக் கணித்து குறிப்புரை தருக.

11. ஒரு பரீட்சையில் வெவ்வேறு வினாக்களுக்கு மாணவர் குழு ஒன்று பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய விபரம் பின்வருமாறுள்ளது.

வினாத்தாள்	A வகுப்புமாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள்	B வகுப்புமாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள
I	10	15
II	18	17
III	25	27
IV	35	23
V	40	26

VI	46	30

a. எந்த வகுப்பு திறமையானது?

b. எந்த வகுப்பு குறைந்த மாறலை உடையது

12.

a. பரம்பல் A இல் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை = 150

கூட்டல் இடை = 120

நியம விலகல் = 20

பரம்பல் B இல் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை = 75

கூட்டல் இடை = 126

நியம விலகல் = 22

இரு பரம்பலினதும் ஒன்றிணைக்கப்பட்டபின் கூட்டலிடை, நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

b. வகுப்பொன்றில் 20 மாணவர்களுக்கான சராசரி வயது 11 ஆண்டுகள் 3 மாதங்கள் ஆகும் நியம விலகல் 5 மாதங்கள் ஆகும். 13 வயதுடைய புதிய மாணவன் ஒருவன் அவ்வகுப்புடன் இணைக்கப்படின், புதிய இடை, நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

13.

பரம்பல்	n	இடை	நியம விலகல்
I	20	60	6
II	120	50	20
III	60	40	12

3 பரம்பல்களினதும் ஒன்றிணைக்கப்பட்ட நியம விலகல், இடை என்பவற்றைக் காண்க.

14. A,B,C,D என்ற 4 தொழிற்சாலைகளின் ஊழியர்களின் சம்பளம் பற்றிய விபரம் வருமாறு.

தொழிற்சாலை	A	B	C
I	20	60	6
II	120	50	20
III	60	40	12

15. இடை m_1, m_2, m_3, m இலும் நியம விலகல் ஆலும் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை n_1, n_2, n_3, n ஆலும் தரப்படுகின்றது என்க.

$m_1 = 32 = 9$ $\quad n_1 = 10$

$m_2 = U = 0$ $\quad n_2 = 1$

$m_3 = V = 0$ $\quad n_3 = 1$

$m_4 = 32 = 9$ $\quad n_4 = n_1 + n_2 + n_3$

$= 10 + 1 + 1$

$= 12$

U,V என்பவற்றைக் காண்க.

16. பரம்பல் I இனது மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $n_1 = 100$

இடை $\overline{x_1} = 15$

நியமவிலகல் $S_1 = 3$

பரம்பல் II இனது மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $= n_1$

இடை $= \overline{x_1}$

நியமவிலகல் $= S_1$

ஒன்றிணைக்கப்பட்ட இடை $\overline{x_1} = 15.6$

நியமவிலகல் $S = 13.44$

பரம்பல் II இனது இடை நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

17. குடும்பங்களின் வாராந்த செலவு பற்றி தகவல் வருமாறு

செலவு (ரூபாவில்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
குடும்ப எண்ணிக்கை	14	f_1	27	f_2	15

இடையம் 25 ரூபா ஆகாரம் 24 ரூபா எனவும் தரப்படின் f_1, f_2 இடை நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

18. பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ள பரம்பல் அட்டவணையைச் சீர்ப்படுத்தி பரம்பலின் இடையத்தையும், காலணைவிலகளையும் காண்க.

(காலணைவிலகல், அரைக்காலணை இடைவீச்சு [Quartile Devioaton = Semi – Inter quartile Range = $= \dfrac{Q_3 - Q_2}{2}$

வயது X (வருடங்களில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை f
20	3
30	61
40	132
50	153
60	140
70	51
80	2
	n=542

19. பின்வரும் பரம்பலுக்கான இடையத்தைக் காண்க.

புள்ளிகள்	f
40-42	4
37-39	5
34 - 36	0
31 -33	0
28 -30	4
25- 27	0
22- 24	0
19-21	4
16 -18	3
13-15	3
10-12	3
	n = 26

20.

a. கொழும்பை நோக்கி காலி வீதி வழியே செல்லும் தனியார் பேருந்துகளின் கதிகள் கிட்டிய கிலோமீற்றர்/ மணித்தியாலத்திற்குக் களுத்துறைப் பாலத்திற்கு

வகுப்பாயிடையின் நடுப்பெறுமானம்	15	30	45	60	75	90
மீடிறன்	10	..	25	30	…	10

பரம்பலின் இடையம் 49.5 ஆகவும், ஆகாரம் 55 ஆகவும் இருப்பின் தரப்படாத இரு மீடிறன்களையும் மதிப்பீடுக.

இதிலிருந்து பரம்பலின் இடையையும் மாறற்றிறனையும் காண்க.

b. 12 எண்கள் உள்ள ஒரு தொடையின் எண்களின் இடை 4 உம் நியம விலகல் 2 உம் ஆகும் 20 எண்களை உடைய இரண்டாம் தொடை ஒன்றின் எண்களின் இடை 5 உம் நியம விலகல் 3 உம் ஆகும். 32 எண்கள் உள்ள இணைந்த தொடையின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

21.

a. μ, σ ஆகியன முறையே {x_i : I = 1,2 …,n) என்னும் பெறுமானத் தொடையின் இடை, நியம விலகல், ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றவெனக் கொள்வோம். பின்வரும் பெறுமானத் தொடைகள் ஒவ்வொன்றினதும் இடையையும். நியம விலகலையும் காண்க.

1. {x_1 +α} இங்கு α ஒரு மாறிலி
2. {βx_1} இங்கு β ஒரு மாறிலி

மேற்குறித்த பேறுகளைப் பயன்படுத்தி (2x + 3: I = 1,2 ……….n] என்னும் பெறுமானத்தொடையின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

b. 3,6,9,12,4,6,8,10,12,14, x,y என்னும் எண்களின் அகாரம் 6 உம் இடை 8 உம் ஆகும்.

i. x,Y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களையும்.

ii. மேற்குறித்த பன்னிரண்டு எண்களினதும் இடையத்தையும் காண்க.

8-k, 8,8+k என்னும் மூன்று மேலதிக எண்கள் சேர்க்கப்படும் போது பதினைந்து எண்களினதும் மாறற்றிறன் 12 ஆக இருக்கக் காணப்படுகின்றது. K யின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

22.

a. n நோக்கல்களின் ஒரு தொடயின் இடையையும் மாறற்றிறனையும் வரையறுக்க. {x_1,x_2 ….x_n} என்பது $\bar{x}$ இடை ஆகவும் மாறற்றிறன் ஆகவும் உள்ள n நோக்கல்களின் ஒரு தொடையெனக் கொள்வோம்.

N நோக்கல்களின் ஒரு தொடையின் இடையையும் மாறற்றினையும் வரையறுக்க. {y_1,y_2……..y_n} என்பது இடை $\bar{y}$ ஆகவும் மாறற்றிறன் $\sigma\frac{2}{2}$ ஆகவும் உள்ள n நோக்கல்களின் ஒரு தொடையெனக் கொள்வோம்.

$\bar{z}, \sigma^2$ ஆகியன முறையே இணைந்த நோக்கல் தொடையின் இடை எனவும் மாறற்றிறன் எனவும் கொள்வோம்.

i. $\bar{z}, = \dfrac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$ எனவும்

ii. $d_1 = \bar{x} - \bar{z}$ ஆக இருக்கும் $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{z})^2 = n\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right)$ எனவும்

(சாடை $x_i - \bar{z} = x_i - \bar{x} + z + \bar{z}$)

iii. $d_2 = \bar{y} - \bar{z}$ ஆவிருக்கும் $\sigma^2 = \frac{1}{n+m}\{n(\sigma_1^2 + d_2^1) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)\}$ எனவும் காட்டுக.

b. 100 மாணவர்களைக் கொண்ட குழு ஒன்று ஒரு குறித்த கணிதச் சோதனை வினாத்தாளுக்குத் தோற்றியது. சோதனை வினாத்தாளின் சித்திப்புள்ளி 30 ஆகும். சித்தியடையும் பரீட்சார்த்திகளின் புள்ளிப் பரம்பல் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றது.

புள்ளிகள்	மாணவர் எண்ணிக்கை
30-34	5
35-39	10
40-44	45
45-49	30
50-54	5
55-59	5

i. சித்தியடையும் பரீட்சார்த்திகளின் புள்ளிப் பரம்பலின் இடையையும் மாற்றற்றிறனையும் காண்க.

ii. எல்லா 100 மாணவர்களினதும் புள்ளிகளின் புள்ளிகளின் புள்ளிகளின் இடையும், நியம விலகலும் முறையே 38, 12 ஆகும். சித்தியடையாத பரீட்சார்த்திகளின் புள்ளிப் பரம்பலின் இடையையும் மாறற்றிறனையும் காண்க.

23.

a. ஒரு குறித்த தொழிற்சாலையில் 100 தொழிலாளர்கள் மாத வேதனங்கள் பற்றிய தகவல்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

மாத வேதனம் (ரூபாவில்)	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை
6000	35
10000	30
15000	25
20000	10

இவ்வேதனப் பரம்பலின் இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றைக் காண்க.

4 தொழிலாளர்கள் மேலதிக நேர வேலையில் ஈடுபட்டும் ஒவ்வொருவரும் தமது மாத வேதனத்தை ரூ. 3750 இனால் அதிகரிக்கச் செய்தும் இருந்தர், இப்பெறுமானங்களில் எது மாறும்? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

b. 200 மனிதர்களின் நிறைகள் கிட்டிய கிலோகிராமுக்கு அளக்கப்பட்டன. பெறப்பட்ட பேறுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

நிறை [kg]	45-54	55-64	65-74	75-84	85-94	95-104
மீடிறன்	24	50	58	35	21	12

i. ஆகார வகுப்பை இனங்கண்டு கொண்டு பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் கணிக்க.

ii. இடைய வகுப்பை இனங்கண்டு கொண்டு பரம்பலின் இடையைக் கணிக்க.

iii. பரம்பலின் இடையையும் நியம விலகலையும் பெறுமானங்கணிக்க.

24. ஒரு பச்சைத் தரவுத் தொடையின் இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகியவற்றை வரையறுக்க ஒரு பச்சைத் தரவுத் தொடை $x_1,x_2 \ldots\ldots x_n$; $N \geq 2$ இன் மாறற்றிறன்.

$S^2 = \frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right\}$ ஐக் கருதுக. இடை $\bar{x}$ இலிருந்து i வது நோக்கல் x_i இன் விலகல் d_i ஆனது $d_i = x - \bar{x}, i = 1,2....,N$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றது.

$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_1^2 = S^2$ எனக் காட்டுக.

ஒரு குறித்த வங்கியில் சேவையாற்றும் ஐந்து பெண்களின் வயதுகள் ஆண்டுகளில் x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 ஆகும். மிகவும் இளைய பெண்ணைத் தவிர ஏனைய பெண்கள் ஒவ்வொருவரும் தமது வயதை வெளிப்படுத்தத் தயங்குகின்றனர். எனினும் 31 ஆண்டுகள் வயதுள்ள மிகவும் இளைய பெண் ஐந்து பெண்களினதும் வயதுகளின் இடையும், இடையமும் முறையே 35, 36 ஆண்டுகள் என வெளிப்படுத்துகின்றார். ஆகாரம் இடையத்துக்குச் சமமன்றெனின், மேலே தரப்பட்ட நிபந்தனைகளைத் திருப்தியாக்கும் வயதுகளின் பெறுமானங்களின் இரு தொடைகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

வயதுகளின் மாறற்றிறன் S^2 ஆனது 5.2 என மிகவும் இளைய பெண் மேலும் வெளிப்படுத்துவாரெனின் $d_i = x_i - \bar{x}, i = 1,2.............5$ என்னும் பெறுமானங்களிலிருந்து S^2 ஐக் கணிப்பதன் மூலம் மேற்குறித்த இரு தொடைகளிலும் எது சரியான வயதுகளைத் தருகின்றனவெனத் துணிக.

அததோடு வயதுகளின் ஒராயவியல்புக் குணகத்தையும் கணிக்க.
அவர்கள் சேவையிலிருந்து ஒய்வு பெறும் வயது 55 ஆண்டுகள் ஆகும்.
$y_i = 55 - x_i$; $i = 1,2\ldots\ldots5$ என்பன எஞ்சியிருக்கும் ஆண்டுகளிலான சேவைக்காலமெனக் கொள்வோம்

வழக்கமான $\bar{y} = 55 - \bar{\bar{x}}$ குறிப்பீட்டில் எனக் காட்டுக.

மேலும் $\bar{y}$ இலிருந்து y_i யின் விலகலானது $-d_i(i=1,2\ldots\ldots.5)$ இற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

அதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, வயதுகளின் மாற்றறிறனும் எஞ்சியிருக்கும் சேவைக்காலங்களின் மாறற்றிறனும் சமனெனக் காட்டுக.

அதோடு எஞ்சியிருக்கும் சேவைக் காலங்களின் ஒராயவியல்புக் குணகத்தின் பெறுமானத்தையும் எழுதுக.

25. இருநூறு வாழைப்பழங்களைக்கொண்ட வாழைக்குலை ஒன்றில் உள்ள வாழைப்பழங்களின் மொத்த நிறையை மதிப்பிடுவதற்கு, அவ் வாழைப்பழங்களிலிருந்து இருபது வாழைப்பழங்களைக் கொண்ட மாதிரி ஒன்றை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டது. வாழைப்பழங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் கிராமிலான நிறை பதிவுசெய்யப்பட்டு, பாகுபடுத்திய வாசிப்புகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

வகுப்பு	வகுப்பு எல்லைகள் (கிராம்)	வகுப்புப் புள்ளிகள் (கிராம்)	மீடிறன்
1	28-32	30	7
2	33-37	35	6
3	38-42	40	4
4	43-47	45	2
5	48 -52	50	1

வகுப்புப் புள்ளிகளைக் குறியீடாக்கியோ, வேறு விதமாகவோ, இடை இடையம், ஆகாரம் ஆகிய அளவைகளைக் காண்க.

மேற்குறித்த பரம்பலின் வடிவம் யாது?

அதோடு மாறற்றிறன் 5^2 ஐக் கணித்து, இதிலிருந்து ஒராயவியல்புக் குணகத்தைக் கணிக்க. செப்பமாக இருநூறு……

26. மாறற்றிறனுக்கான $\sigma^2 = \dfrac{\sum f(x-\bar{x})^2}{\sum f}$ என்னும் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து ஆரம்பித்து

மேற்குறித்த குறியீட்டை பயன்படுத்தி நியம விலகலுக்கு $\sigma = c\sqrt{\dfrac{\sum fy^2}{\sum f} - y^2}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பெறுக.

பின்வரும் வயது – வகுப்புப் பரம்பலில் 2003 ஆம் ஆண்டுக்கான இலங்கையின் மதிப்பிட்ட மக்கள் தொகை மில்லியனில் தரப்பட்டுள்ளது.

வயது வகுப்பு (ஆண்டு)	மீறன் (மக்கள் தொகைமில்லியனில்
0 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	4.2
10 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	3.9
20 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	3.4
30 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	3.2

40 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	2.8
50 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	2.8
60 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	2.5
70 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	1.6
80 ம் அதற்குக் கூடவும், 10 இலும் குறைய	0.6
	25.0

[குறிப்பு : ஒவ்வொரு வகுப்பினதும் அகலம் 10 ஆண்டுகலாகும். 90 ஆண்டுகளுக்க மேற்பட்ட வயதை உடைய மக்களின் தொகையைப் புறக்கணிக்கலாம்]

a=45 ஆண்டுகள் எனவும் ஒவ்வொரு வகுப்பினதும் அகலம் c=10 ஆண்டுகள் எனவும் கொண்டு மேற்குறித்த குறியீட்டை பிரயோகித்து ஒவ்வொரு வகுப்புக்கும் y, fy, fy^2 ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

இதிலிருந்து மக்கள் தொகையின் இடை வயதையும் நியம விலகளையும் ஆண்டுகளில் ஒரு தசம தானத்திற்குத் திருத்தமாக மதிப்பிடுக.

27. குறித்த மின்குமிழ்த் தொழிற்சாலை ஒன்றின் பயப்பிலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்ட 200 மின்குமிழ்களைக் கொண்ட மாதிரி ஒன்றின் ஆயட் காலங்களின் கூட்டமாகிய மீடிறன் பரம்பலை பின்வரும் அட்டவணை தருகின்றது.

ஆயட் காலம் (வதனங்களில்)	மின்குமிழ்களின் எண்ணிக்கை
95-99	10
90-94	14
85– 89	16
80 -84	21
75 -79	35
70- 74	41
65- 69	38
60-64	15
55 -59	7
50-54	3

a. இவ்வாயுட் காலங்களில்
   i. இடையம்
   ii. கீழ்க் காலணை $[Q_1]$
   iii. மேற் காலணை $[Q_3]$ ஆகியவற்றை ஒரு தசம தானத்திற்கு மதிப்பீடுக.

b. இப்பரப்பலின்,
   i. இடை
   ii. நியம விலகல்
   iii. ஓராயக் குணகம் ஆகியவற்றை ஒரு தசம தானத்திற்கு மதிப்பீடு இப்பரம்பலின் வடிவம் யாது?