துணிகோவைகள் (DETERMINANTS)

ஒரு சதுரத்தாயம் A இன் துணிகோவை |A| எனக்குறிக்கப்படும் இது Det A எனவும் குறிக்கப்படலாம்

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ எனின் $|A| = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$= ad - bc$ ஆகும்.

$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ இன் துணிகோவை |B| ஆனது

$|B| = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ என்பதால் குறிக்கலாம்.

$a_1x + b_1y = c_1$ ………………..(1)

$a_2x + b_2y = c_2$ ….………………(2) என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுத் தொகுதியை அவதானிக்குக.

(1) $\times b_2 - (2) \times b_1$ $(a_1 b_2 - a_2b_1)\, x = b_2c_1 - b_1c_2$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

(2) $\times a_1 - (2) \times a_2$ $(a_1 b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

குறிப்பு 1 : $a_1b_2 = a_2b_1$; $a_1c_2 = a_2c_1$ எனில் இரு சமன்பாடுகளும் சமன் அப்பொழுது எண்ணிலடங்காத தீர்வுகள் உண்டு.

குறிப்பு 2 : $a_1b_2 = a_2b_1$; $b_2c_1 \neq b_1c_2$ எனில் இச்சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளுக்கு தீர்வுகள் இல்லை

a_1,b_1 a_2b_2 என்னும் எண்கள் என்றவாறு இரண்டாம் வரிசைத் துணிகோவையால் குறிக்கப்படுகின்றது. அது 2x2 துணிகோவை எனப்படும் $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1, b_2 - a_2, b_1$ ஆகும்.

இதன் படி $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ எனின் முன்பு தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வு $x = \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{matrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{matrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ என துணிகோவையை உபயோகித்துக் காணலாம்.

இரு மாறிகளுடனான ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் போது துணிகோவைகளின் உபயோகம் குறைவாக இருப்பினும் மாறிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக உள்ள போது தீர்வுகளைத் துணிகோவைகள் மூலம் கூறுவதால் இலகுவாகப் பெற்றுக்கொள்ளலாம் என்பதுடன் தீர்வுகளின் சமச்சீர்த் தன்மையாய் இலகுவாக நினைவில் வைத்திருக்கவும் முடியும்.

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ எனும் துணிகோவையின் $a_1b_1a_2b_2$ என்பன மூலகங்கள் எனப்படும் a_1b_1 என்பன துணி கோவையின் முதலாம் வரிசை மூலங்கள் எனவும் a_2b_2 என்பன துணிகோவையின் இரண்டாம் வரிசை மூலகங்கள் எனவும் குறிப்பிடப்படும் இவ்வாறே a_1,a_2 என்பனவும் b_1,b_2 என்பன துணிகோவையின் முந்நூறு மூலைவிட்டம் எனவும் $a_2\,,b_1$ என்பன துணை மூலைவிட்டம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

உதாரணம் : $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\times5-1\times2=13 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\times5-1\times(-2)=17$

$a_1x + b_1y = c_1$ ………………..(1)

$a_2x + b_2y = c_2$ ….………………(2) என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுத் தொகுதியை அவதானிக்குக.

(3) x b_2 – (2) xb_1 $(a_1 b_2 - a_2b_1)\, x = b_2c_1 - b_1c_2$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

(4) x a_1 – (2) x a_2 $(a_1 b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

குறிப்பு 1 : $a_1b_2 = a_2b_1$; $a_1c_2 = a_2c_1$ எனில் இரு சமன்பாடுகளும் சமன் அப்பொழுது எண்ணிலடங்காத தீர்வுகள் உண்டு.

குறிப்பு 2 : $a_1b_2 = a_2b_1$;$b_2c_1 \neq b_1c_2$ எனில் இச்சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளுக்கு தீர்வுகள் இல்லை

a_1,b_1 a_2b_2 என்னும் எண்கள் என்றவாறு இரண்டாம் வரிசைத் துணிகோவையால் குறிக்கப்படுகின்றது. அது 2x2 துணிகோவை எனப்படும் $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1,b_2 - a_2,b_1$ ஆகும்.

இதன் படி $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ எனின் முன்பு தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் தீர்வு $x = \begin{pmatrix} \frac{\begin{matrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} \frac{\begin{matrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

என துணிகோவையை உபயோகித்துக் காணலாம்.

இரு மாறிகளுடனான ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் போது துணிகோவைகளின் உபயோகம் குறைவாக இருப்பினும் மாறிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக உள்ள போது தீர்வுகளைத் துணிகோவைகள் மூலம் கூறுவதால் இலகுவாகப் பெற்றுக்கொள்ளலாம் என்பதுடன் தீர்வுகளின் சமச்சீர்த் தன்மையாய் இலகுவாக நினைவில் வைத்திருக்கவும் முடியும். $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ எனும் துணிகோவையின் $a_1 b_1 a_2 b_2$ என்பன மூலகங்கள் எனப்படும் $a_1 b_1$ என்பன துணி கோவையின் முதலாம் வரிசை மூலங்கள் எனவும் $a_2 b_2$ என்பன துணிகோவையின் இரண்டாம் வரிசை மூலகங்கள் எனவும் குறிப்பிடப்படும் இவ்வாறே a_1, a_2 என்பனவும் b_1, b_2 என்பன துணிகோவையின் முந்நூறு மூலைவிட்டம் எனவும் a_2, b_1 என்பன துணை மூலைவிட்டம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

உதாரணம் : $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 2 = 13 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times (-2) = 17$

பின்வரும் துணி கோவைகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

வரிசை இரண்டிலான துணிகோவையின் பண்பு

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

   எனவே துணிகோவையின் முதல் வரிசை முதலாம் நிரலுடனும் இரண்டாம் வரிசை இரண்டாம் நிரலுடனும் இடம் மாற்றுவதால் பெறப்படும். துணிகோவையின் பெறுமானம். முதலாம் துணிகோவையின் பெறுமானத்திற்கு சமமாகும்.

2. $\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} b = ka_1 b_2 - ka_2 b_1 = k(a_1 b_2 - a_2 b_1) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

   இவ்வாறே $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1 b_2 - ka_2 b_1 = k(a_1 b_2 - a_2 b_1) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ஆகவே ஏதாவதொரு துணிகோவையின் வரிசையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள மூலகங்களை ஒரு கணியத்தால் பெருக்குவதால் பெறப்படும் துணிகோவையின் பெறுமானம், முதல் துணிகோவையை அக்கணியத்தால் பெருக்குவதால் பெறப்படும் பெறுமானத்திற்குச் சமனாகும் .

3. $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

   இவ்வாறே $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ஆகவே ஒரு துணி கோவையின் நிரை (அல்லது நிரை) அடுத்த நிரை (அல்லது நிரல்) யுடன் இடைமாற்றுவதால்

பெறப்படும் துணிகோவையின் பெறுமானம் முதல் துணி கோவையின் மறைப்பெறுமானத்திற்குச் சமனாகும்.

4. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = k(a_1b_1 - a_1b_1) = 0$

துணி கோவை ஒன்றின் நிரை (அல்லது நிரல்) மற்றைய நிரை (அல்லது நிரல்) யின் பெருக்கமாயின் அத்துணிகோவையின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.

5. $\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + ka_2)b_2 - a_2(b_1 + kb_2)$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

இதேபோல் $\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + kb_1)b_2 - (a_2 + kb_2)b_1$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

6. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

$= a_1a_2 - a_2b_1 + a_1c_2 - b_1c_1 = a_1(b_2+c_2) - b_1(a_2+c_2)$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix}$$

துணிகோவை ஒன்றின் ஒரு நிரை (அல்லது நிரல்) வேறொரு துணிகோவையின் ஒத்த நிரை (அல்லது நிரல்) யுடன் சமனாயின் அத்துணிகோவையை மேற்காட்டியவாறு கூட்டியெழுதலாம்.

குறிப்பு : பொதுவாக

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

உதாரணம் $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 + 7 = 8$ ஆகும்.

$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 32 - 20 =$

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)(x_1y_2 - x_2y_2)$

$$= a_1b_2\ x_1y_2 + a_2b_1\ x_2y_1 - a_1b_2\ x_2y_1 - a_2b_1x_1y_2$$

$\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 & a_1y_1 + b_1y_2 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & a_2y_1 + b_2b_2 \end{vmatrix} = (a_1x_1 + b_1x_2)(a_2y_1 + b_2y_2) - (a_1y_1 + b_1y_2)(a_2x_2 + b_2x_2)$

$= a_1a_2x_1y_1 + a_1b_2x_1y_2 + a_2b_1\ x_2y_1 + b_1b_2\ x_2y_2 - a_1a_2x_2y_1 - a_2b_1x_1y_2 - b_1b_2x_2y_2$

$= a_1b_2x_1y_2 + a_2b_1x_2y_1 - a_1b_2x_2y_1 - a_2b_1x_1y_2$

$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 & a_1y_1 + b_1y_2 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & a_2y_1 + b_2\,y_2 \end{vmatrix}$

குறிப்பு : துணிகோவை ஒன்றின் நிரை, நிரல் என்பன இடமாற்றம் செய்வதால் பெறுமானத்தில்

வித்தியாம் ஏற்படாது(பண்டு 1) எனவே

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ என எழுதலாம் இத்துணிகோவைகளின் நிரை நிரல் என்பவற்றை காவிகளாகக் கொண்டு எண்ணிப்பெருக்கத்தைப் பெற்றால்

$$\begin{matrix} a_1x_1 + a_2x_2 & a_1y_1 + a_2y_2 \\ b_1x_2 + b_2x_2 & b_1y_1 + b_2\,y_2 \end{matrix}$$

எனும் வலது கைப்பக்கத்தைப் பெறலாம்.

பயிற்சி

1. பெறுமானங்கள் காண்க.

$\boldsymbol{i}.\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad ii.\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad iii.\begin{vmatrix} 50 & 80 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ $\quad iv.\begin{vmatrix} 173 & 163 \\ 94 & 104 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$ இன் ஒரு காரணி (a-b) எனக் காட்டுக.

3. சுருக்குக.

$i.\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ $\quad ii.\begin{vmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{vmatrix}$ $\quad iii.\begin{vmatrix} 2t & 1-t^2 \\ 1-t^2 & 2t \end{vmatrix}$ $\quad iv.\begin{vmatrix} px+qz & rx+sz \\ py+qz & ry+sy \end{vmatrix}$

4. $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ எனின் $\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & b+kc \end{vmatrix}$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் Δ ஆகுமெனக் காட்டுக.

5. $\begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -6 & 3+x \end{vmatrix} = 0$ எனும் சமன்பாட்டில் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மூன்றாம் வரிசைத் துணிகோவைகள்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்பது மூன்றாம் வரிசை துணிகோவை (அல்லது 3x3) எனப்படுவதுடன்

அதன் பெறுமானம் $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$ ஆகும்.

இதன் பெறுமானத்தை $\Delta = a_1(b_2c_3-b_3c_2)b_19a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$ …..(1)

$=-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+b_2(a_1c_3-a_3c_1)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)$ ……………(2)

$= a_3(b_1c_2-b_2c_1)-b_3(a_1c_2-a_2c_1)+{}_3(a_1b_2-a_2b_1)$ …………. (3)

$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_2c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$ ………….(4)

$= -b_2(a_2c_3-a_3c_2)+b_1(a_1c_3-a_3c_1)-b_3(a_1c_2-a_2c_1)$……………...(5)

$= c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)$ …………..(6) என்றவாறு பல்வெறு வகைகளில் எழுதலாம்.

இத்துணிகோவையின் முதலாம், இரண்டாம் மூன்றாம் நிரைகள் (row) உள்ளன. இவை r_1, r_2, r_3 என்பதால் குறிக்கப்படும் இதே போல் முதலாம் இரண்டாம் மூன்றாம் நிரல்கள் c_1, c_2, c_3 என்பதால் குறிக்கப்படும்.

3x3 துணிகோவையின் மேலே தரப்பட்ட விரிவை.

$$\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} ________ (A)$$

என எழுதலாம் இது முதலாம் நிரையின் விரிவு எனப்படும். இவ்வாறே இரண்டாம், மூன்றாம் விரிவுகளை எழுதலாம்.

(4)ம் விரிவு

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ ஆகும்.

இது துணிகோவையின் முதலாம் நிரலின் விரிவு எனக் குறிப்பிடப்படும் இவ்வாறே (5) ஆம், (6)ஆம் விரிவுகளை துணிகோவையின் இரண்டாம், மூன்றாம் நிரலின் விரிவுகள் எனக்குறிப்பிடலாம்.

$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ என்பது a_1 இன் சிறுபகுதி (minor) எனப்படும்.

$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ & c_3 \end{vmatrix}$ இவ்வாறு என்பது b_1 இன் சிறுபகுதி (minor) எனப்படும்

$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ என்பது a_3 இன் சிறுபகுதி எனப்படும்.

எந்த ஒரு மூலகத்தினதும் சிறுபகுதி எனக் குறிப்பிடப்படுவது, அம்மூலகத்தைக் கொண்ட நிரைகளையும், நிரலையும் நீக்கியபின், எஞ்சியிருக்கும் 2 x 2 துணிகோவையாகும்.

உதாரணம் :

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ இன் c_2 இன் சிறுபகுதியைக் காண்பதற்கு c_2 ஐக் கொண்டுள்ள இரண்டாம் நிரலையும் மூன்றாம் நிரலையும் நீக்கியபின் பெறப்படும்

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

(1) முதல் (6) வரையிலான விரிவுகளில், ஏதாவதொரு நிரையை (அல்லது நிரலைத் தேர்ந்தெடுத்து மூலகங்களை ஒத்த சிறுபகுதிகளால் பெருக்கி ஒன்றுவிட்டொன்றுக்கு +,- அடையாளங்களை இடுவதால் துணிகோவையின் பெறுமானத்தைக் கணிக்கலாம் +,- அடையாளங்களை இடும் போது ஒரு விதியைப் பின்பற்றுதல் வேண்டும்.

இவ் அட்டவணையின் முந்துறு மூலைவிட்டத்தின் வழியே + குறியும் ஏனைய இடங்களில் மாறிமாறி இ + குறிகள் எழுதப்பட்டுள்ளதை அவதானிக்கலாம்.

$$\begin{vmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}$$

அட்டவணையிலிருந்து பெறப்பட்ட உரிய குறியீட்டுடனான சிறுபகுதியை இணைக்காரணி (cofactor) யாகக் கருதப்படுவதுடன் ai, bi, ci இன் இணைக்காரணிகளாக முறையே Ai,Bi,Ci என்பன குறிக்கப்படும் (i=1,2,3)

இதன்படி $A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ $B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

இணைக்காரணிகளை உபயோகித்து

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 =$ ________ என்றவாறு எழுதலாம்.

தோற்றம்.

யாதுமொரு நிரைளின் (அல்லது நிரலின்) மூலகங்கள், வேறொரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) சிறுபகுதிகளால் பெருக்குவதால் பெறப்படும் விடைகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

உதாரணமாக $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = -a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_3 \\ a_3 & c_1 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

பயிற்சி

$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0$ எனக் காட்டுக.

குறிப்பு : பொதுவாக A.B போன்ற குறியீடுகள் பொதுவாக துணிகோவைகளுக்கு உபயோகப்படுத்தப்பட்டாலும் மூலகங்கள் எண்களாகத் தரப்படும் பொது குறிப்பிடப்படுவதில்லை.

உதாரணம் :1 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ ஐ இரண்டாம் நிரைய எடுத்து விரிவாக்குவதன் மூலம்

பெறுமானம் காண்க.

-2,2,5 என்பவற்றின் இணை காரணிகள் முறையே

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3\,;\ +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9,\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1 \times 3) + (2 \times -9) + (5 \times -10) = -71$$

உதாரணம் : 2

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} 0 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

இரண்டாம் நிரலால்

=-2(-22) + 1(-24) =20

உதாரணம் : 3 $\begin{vmatrix} a & o & o \\ p & b & o \\ q & r & c \end{vmatrix}$ இன் பெறுமானம் காண்க.

முதலாம் நிறை அல்லது நிரலால் விரித்து எழுதுவதால் abc எனப்பெறப்படும்

மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட ஒழுங்கமை சமன்பாடுகள்.

$a_1x + b_1 y + c_1z = d_1$ ……………………(1)

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$……………………. (2)

$a_3x + b_3y + c_3 z = d_3$ ……………………(3)

என்ற ஒருங்கமை சமன்பாட்டுத்தொகுதி, தனியான தீர்வைக் கொண்டுள்ளதெனில் அதனை துணிகோவை மூலம் காணலாம்.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ என்க.

(1) $A_1 + (2)A_2 + (3)A_3$

$= (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)\ x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)\ y\ (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)$

$= d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$

$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$

$\Delta x = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$

(10.1.5 தோற்றத்தின் படி $b_1A_1 + b_2A_2 + d_3A_3 = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$

$$d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore\ \Delta \neq 0$ எனின் $x = \dfrac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

இதே போல் $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_2 & d_2 & c_2 \\ c_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$; $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$ என நிறுவலாம்.

எனவே Δ # 0 ஆகும் போது சமன்பாட்டுத்தொகுதிக்கு தனியாக தீர்வு உண்டு $\Delta = 0$ ஆகும் போது சில வேளைகளில் தீர்வு இல்லாதிருக்கும் சில சந்தர்ப்பங்களில் இரண்டு அல்லது 3 சமன்பாடுகள் பொருந்துவதால் முடிவில்லாத தீர்வுகள் காணப்படும்

உதாரணம் :1

$x + y - z = 1$

$x - y + z = 1$

$2x - z = 4$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) - 1(-1-2) - 1(0+2) = 2$

மேலும் $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-0) - 1(-2-4) - 1(0+4) = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1(-2-4) - 1(-1-2) - 1(4-4) = -3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4-0) - 1(4-4) + 1(0+2) = -2$

$x = \frac{3}{2},\ y = \frac{-3}{2},\ z = -1$

உதாரணம் : 2

தீர்க்க :

$x + y - z = 1$ ________ (1)

$3x - y + z = 5$ ________ (2)

$x - y + z = 2$ ________ (3) இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0) - 1(2) - 1(-2) = 0$

$(1)(3) \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ அல்லது $(2) - (3) \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

(2) இல் இருந்து $-y + z = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

(1) இல் இருந்து $y - z = -\frac{1}{2}$

(3) இல் இருந்து $-y + z = \frac{1}{2}$ 3 முடிவுகளும் $-y + z = \frac{1}{2}$ என்பதைத் தருகின்றன. எனவே $y = b$ எனின் $z = \frac{1}{2} + b$ ஆகும்.

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = b;\ z = \frac{1}{2} + b$ (இங்கு b ஏதாவது மெய்யெண்)

உதாரணம் : 3

தீர்க்க :

$x + y - z = 1$ ________ (1)

$x - y + z = 2$ ________ (2)

$y - z = 4$ ___________ (3) இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ஆகும்.

மேலும் $(1) + (2) \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$(1) - (2) \Rightarrow = y - z = -\frac{1}{2}$

(3) இலிருந்து $y - z = 4$ $\therefore$ இத்தொகுதிக்கு தீர்வு இல்லை.

வரிசை 3 துணி கோவையின் பண்புகள்

1. நிரைகளை ஒத்த நிரல்களாகவும் நிரல்கள் ஒத்த நிரைகளாகவும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் இரு துணிக்கைகளின் பெறுமானங்களும் சமமாகும்.

அதாவது $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (முதலாவது நிரலால் விரிப்பதால்)

2. துணிகோவை ஒன்றின் ஒரு நிரையில் உள்ள (அல்லது நிரலில்) மூலகங்கள் ஒரு மாறிலியால் பெருக்குவதால் பெறப்படும் துணிகோவையின் பெறுமானம் முதலாவது துணிகோவையை அம்மாறிலியால் பெருக்குவதற்கு சமனாகும்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1kb_2c_3 - kb_3c_3 - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2kb_2 - a_3kb_2)$$

$$= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$= k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ஏனைய

நிரைகளுக்கோ அல்லது நிரல்களுக்கோ இவ்வாறு நிறுவலாம்

3. துணிகோவை ஒன்றின் நிரை (அல்லது நிரல்) இன்னொரு நிரைக்கு (அல்லது நிரலுக்கு) இடைமாற்றுவதால் பெறப்படும் துணிகோவையின் பெறுமானம் முதல் துணிகோவையின் பெறுமானத்தின் மறையாகும்.

உதாரணம்:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ இன் மூன்றாம் நிரலும் முதலாம் நிரலும் இடமாற்றம் செய்யப்படுகிறது என்க.

எனவே $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$\Delta = c_1(a_3b_2 - a_2b_3) - b_1(c_3a_2 - a_2c_3) + a_1(b_3c_2 - b_2c_3)$

$= [-a_1(b_2c_3 - b_2c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$

4. துணிகோவையொன்றின் ஒரு நிரை (அல்லது நிரல்) இன்னொரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) மடங்காக அமையம் போது அத்துணிக்கோவையின் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.

உதாரணம்:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ எனின் இதனை மூன்றாம் நிரலால் விரிப்பதால்.

$\Delta = c_1(ka_2a_3 - ka_2a_3) - c_2(ka_1a_3 - ka_1a_3)c_3(ka_1a_2 - ka_1a_2) = 0$

5. யாதுமொரு துணிகோவையின் ஒரு நிரைக்கு (அல்லது நிரலுக்கு) வேறொரு நிரையின் (அல்லது நிரலின்) ஒரு மடங்கு கூட்டப்படுவதால் பெறப்படும் துணிகோவையின் பெறுமானம் முதல் துணிகோவையின் பெறுமானத்திற்குச் சமமாகும்.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ எனவும், $\Delta^{/} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ எனவும் கொள்ளலாம்

(3ஆவது நிரையில் விரிப்பதால்)

இப்பொழுது $\Delta/ = a_3[(b_1+kb_2)c_2 - b_2(c_1+kc_2)] - b_3[(a_1+ka_2)c_2 - a_2(c_1+kc_2)] + c_3[(a_1+ka_2)b_2 - a_2(b_1+k_2)]$

$= a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= \Delta$

6. வரிசை மூன்றில் உள்ள இரு துணிக்கோவைகளின் ஒத்த நிரைகள் இரண்டு சமமாயின், அவ்விரு துணிக்கோவைகளும் பின்வருமாறு கூட்டப்படலாம்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x & b_3 + y & c_3 + z \end{vmatrix}$$

$a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) + x(b_1c_2 - b_2c_1) - y(a_1c_2 - a_2c_1) + z(a_1b_2 - a_2b_1)$

$= (a_3 + x)(b_1c_2 - b_2c_1) - (b_3 + y)(a_1c_2 - a_2c_1) + (c_3 + z)(a_1b_2 - a_2b_1)$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x & b_3 + y & c_3 + z \end{vmatrix}$$

7. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_2 & a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_2 & a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_2 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_2 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_2 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_2 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3x_2 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_2 \end{vmatrix}$$

வலகைப்பக்கத்திலுள்ள துணிகோவையை எனக் குறித்து பண்பு (6) இனை உபயோகித்து மூன்று துணிகோவைகளின் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டலாம்

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1x_1 & a_1y_1 & a_1z_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} b_1x_2 & b_1y_2 & b_1z_2 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} c_1x_3 & c_1y_3 & c_1z_3 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 & a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$

இத்துணிக்கோவை

க் கூட்டலில் உள்ள மூன்று தணிகோவைகளையும் முறையே Δ_1, Δ_2 Δ_3 எனக் குறிப்பிடுவோம் துணிகோவை Δ_1 ஐ நாம், பின்வருமாறு 3 துணிகோவைகளின் கூட்டலாக எழுதாலம்

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1x_1 & a_1y_1 & a_1z_1 \\ a_2x_1 & a_2y_1 & a_2z_1 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1x_1 & a_1y_1 & a_1z_1 \\ b_2x_2 & b_2y_2 & b_2z_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1x_1 & a_1y_1 & a_1z_1 \\ c_2x_3 & c_2y_3 & a_2z_3 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 & a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 & a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 \end{vmatrix}$$

இப்போது Δ_1 ஐ 3

துணிகோவைகளின் கூட்டலாக எழுதியுள்ளோம். இம்மூன்றில் முதாலாவது துணிகோவையின் முதல் இரு நிரைகளும் விகிதசமமாக உள்ளதால் அதன் பெறுமானம் பூச்சியமாகும். எனவே Δ_1 இன் இரண்டாவது துணிகோவை பின்வருமாறு வரும்.

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 & a_1y_1 & a_1z_1 \\ b_2x_2 & b_2y_2 & b_2z_2 \\ c_3x_3 & c_3y_3 & c_3z_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

இவ்வாறே Δ_1 இன் மூன்றாவது துணிகோவை. $\begin{vmatrix} a_1x_1 & a_1y_1 & a_1z_1 \\ b_2x_2 & b_2y_2 & b_2z_2 \\ c_3x_3 & c_3y_3 & c_3z_3 \end{vmatrix}$ என்பதற்குச் சமம்

$$= a_1b_2c_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

எனவே $\Delta_1 \quad = a_1b_2c_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - a_1b_2c_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

இதே போல் $\Delta_2 = -b_1(a_2c_3 - a_3c_2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & \dot{z}_3 \end{vmatrix}$ எனவும்

$\Delta_3 = -c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ எனவும் காட்டலாம்.

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

குறி

1. A என்பது ஒரு தாயமெனில் A யின் துணிகோவை |A| என எழுதப்படும். எனவே மேற்கூறிய பின்பு 7 ஐப் பயன்படுத்தி |AB| =|A||B| என எழுதலாம்.

2. |BA|=|B| |A| ஆதலால் |A|,|B| என்பன எண்களாக இருப்பதால் |AB|=|BA| ஆகும்.

பயிற்சி :

$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ எனக் காட்டுக.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\ (x^2+y^3+z^3 - 3xxyz) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ என பொருத்தமான முறையில் α, β, γ ஐத் தெரிவதன் மூலம் எழுதலாம் எனக் காட்டுக.

துணிகோவையின் பெறுமானத்தைக் கணிப்பதற்கு பண்பு 6 ஐப் பயன்படுத்தி பொருத்தமான நிரலின் அல்லது நிரையின் இரு மூலகங்களைப் பூச்சியமாக்குவதன் மூலம் விரிவை இலகுவாக்கலாம்.

உதாரணம் 1:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ -3 & 10 & -27 \\ 1 & 3 & 11 \end{vmatrix}$$ ஐக் கணிக்க.

$$=\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & 10 & -27 \\ 1 & 3 & 11 \end{vmatrix} (r_1 - 2r_2)$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 19 & 6 \\ 1 & 3 & 11 \end{vmatrix} (r_2 + 3r_1)$$

முதலாம் நிரலில் விரித்து எழுத 1(-2x6 – 19x6 - 4) = 64

உதாரணம் 2:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \end{vmatrix}$$ இன் காரணிகளைத் தருக.

தரப்பட்ட துணிகோவையை Δ என்க

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+x+x^2 & 1+x+x^2 \\ 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \end{vmatrix} r_1 + r_2 + r_3$$

$|1 \quad 1 \quad 1|$

$$+x+x^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x^2-1 & x-1 \\ x & 1-x & x^2-x \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2 - c_3 \\ c_3 - c_1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ -7 & x+5 & -1 \\ -6 & 6 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -7 & x+5 & x+4 \\ -6 & 6 & x+4 \end{vmatrix} = 0 \quad c_3 + c_2$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ x \end{matrix}\Bigg|$$

$$(x+4)\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -7 & x+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$+ 1]$

உதாரணம் 3:

தீர்க்க :

$$(x+4)\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ x-2 & x+5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad c_1 + c_2$$

$$(x+4)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x+5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+4)(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x+5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \quad r_2 - r_3$$

$$(x+4)(x-2)(x-2) = 0$$

மூலகங்கள் : -4,2,2

உதாரணம் 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ (y+z-x)^4 & (z+x-y)^4 & (x+y-z)^4 \end{vmatrix}$$

16xyz(y-z) (z-x) (x-y) எனக்காட்டுக.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ (y+z-x)^4 & (z+x-y)^4 & (x+y-z)^4 \end{vmatrix}$$

x =y ஐப் பிரதியட முதலாம், இரண்டாம் நிரல்கள் சமம். எனவே $\Delta = 0$ எனவே காரணித்தேற்றத்தின் படி (x-y) ஒரு காரணியாகும். இவ்வாறே (y-z) (-x) என்பவையும் காரணிகளாகும்.

x=0 எனப்பிரதியிட இரண்டாம் மூன்றாம் நிரல்கள் சமம் எனவே x என்பது அத்துணிக்கோவையின் ஒரு காரணி இவ்வாறே y,z என்பவையும் காரணிகளாகும். இது 6ம் படியிலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பி என்பதை அவதானிக்கலாம்.

$\Delta = \lambda = xyz\ (x-y)\ (y-z)(z-x)$

x^2y^2z இன் குணகங்களை ஒப்பிடுவதால் $\lambda = -16$

பயிற்சி:

1. பெறுமானங் காண்க.

$$(i) \begin{vmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (iii) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 12 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$(i)\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ -7 & x+5 & -1 \\ -6 & 6 & x-2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (ii)\begin{vmatrix} x+3 & 5 & 6 \\ -1 & x-3 & -1 \\ 1 & 1 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$ எனக் காட்டுக.

4. பெறுமானங் காண்க.

$$(i)\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} \quad (ii)\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & -1 \end{vmatrix} \quad (iii)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad (iv)\begin{vmatrix} 21 & 21 & 50 \\ 17 & 3 & 35 \\ 22 & 31 & 52 \end{vmatrix}$$

$$(v)\begin{vmatrix} 21 & 10 & 30 \\ 9 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (vi)\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \end{vmatrix} \quad (vii)\begin{vmatrix} 207 & 135 & 52 \\ 184 & 120 & 17 \\ 69 & 5 & 109 \end{vmatrix}$$

5. $\begin{vmatrix} a & x & x+a \\ x+a & a & x \\ x & x+a & a \end{vmatrix} = 2(x^3 + a^3)$ எனக் காட்டுக.

6. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ ஐத் தீர்க்க.

7. காரணியாக்குக.

$$(i)\begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix} \quad (ii)\begin{vmatrix} x & yz & x^2 \\ y & zx & y^2 \\ z & xy & z^2 \end{vmatrix} \quad (iii)\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & x^2 & x \\ x & 1 & x^2 \end{vmatrix}$$

8. $(x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3)$ ஒரு நேர்கோட்டுப் புள்ளியெனின் $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$எனக்காட்டுக.

9. தீர்க்க. $\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 5 \\ 0 & 5-x & 2 \\ 8 & -6 & 9-x \end{vmatrix} = 0$

10. பின்வரும் துணிகோவைகளைக் காரணிகளாக்குக.

$$(i)\begin{vmatrix} 1 & bc & a \\ 1 & ca & b \\ 1 & ab & c \end{vmatrix} \quad (ii)\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad (iii)\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(iv)\begin{vmatrix} a & bc & a^2 \\ b & ca & b^2 \\ c & ab & c^2 \end{vmatrix} \quad (v)\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

11. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = k(a+b+c)\,(b-c)\,(c-a)\,(a-b)$ ஆகுமாறுள்ள ஒருமை k ஐக் காண்க.

12. $\begin{vmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{vmatrix}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

13. $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \neq 0$ ஆகவும் $\begin{vmatrix} A+\lambda & H & G \\ H & B+\lambda & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = 0$ இன் λ ஒரு மூலமாகுமெனின்

(x+a) (x+b) = h^2 இல் $^{\Delta}/_{\lambda}$ ஒரு மூலமாகும் எனக்காட்டுக. இங்கு இரண்டாவதுதுணிகோவையில் A,B,C……… என்பன முறையே a,b,c…இன் காரணிகளாகும்.

14. 4x – y- 2z =-7

3x +sy – 6z = 4

6x – 13y + 6z = -29 என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியைத் தீர்க்க.

15. λ இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு

λx + y =1

x+ λy –z =1

2x + 2y – 2z =1 எனும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு தீர்வு உண்டு.

16. A இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு

x+y =1

2x + ay = 5

ax +y =-3 எனும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வுகளை ஆராய்க.

17. xcosθ + ycosϕ =cosα

xsinθ + sinϕ - = sin α எனும் சமன்பாட்டுகளை x,y இற்கு தீர்க்க.

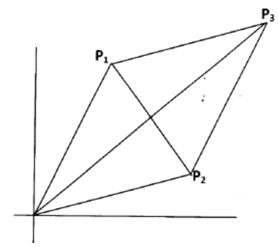
கேத்தரி கணிதத்தில் துணிகோவைகளின் உபயோகம்.

$P_1 \equiv (x_1 y_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2)$ ஆகவும் 0 உற்பத்தி ஆகவும் இருக்க OP_1OP_2 என்பவற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரம் ஒன்றின் பரப்பளவு $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ எனும் துணிகோவையின் பெறுமானமாகும். இவ்வாறே OP_1P_2 எனும் முக்கோணியின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ எனும் துணிகோவையின் பெறுமானமாகும் பொதுவாக $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$,$P_3(x_3y_3)$ உச்சிகளைக் கொண்ட முக்கோணி ஒன்றின் பரப்பளவைக் காண்போம்.

$\Delta P_1P_2P_3 = \Delta OP_3P_1 + \Delta OP_2P_3 - \Delta\ OP_2P_1$ (இடஞ்சுழியாக ஒவ்வொரு முக்கோணமாகச் செல்ல வேண்டும். இல்லையேல் மறைப்பெறுமானங்களைப் பெறலாம்)

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



01. X=0 என்பது சமன்பாடு $\begin{pmatrix} 4 & -1 & x-1 \\ x+2 & 1 & 1 \\ 4 & x-4 & 2x-4 \end{pmatrix} = 0$ இன் ஒரு தீர்வு என்பதை வாய்ப்புப்பார்க்க. அதோடு, மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் மற்றைய எல்லாத் தீர்வுகளையும் காண்க.

02. பின்வரும் துணிகோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & bc & a \\ 1 & ca & b \\ 1 & ab & c \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \\ a & b & c \end{pmatrix}$

03. $\begin{pmatrix} x^2 & x & 2 \\ 1 & x^2 & -1 \\ X & 1 & -1 \end{pmatrix}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

x இற்குத் தீர்க்க $\begin{pmatrix} x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1+x \\ 1 & -x \end{pmatrix}$

04. $X\varepsilon 1R$ இற்கு $f(x) = \begin{pmatrix} x^3 & 3 & 0 \\ x^2 & 1 & 1 \\ x+2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம்.

i. f(0) f(f(0)) ஆகியவற்றைக் காண்க.

ii. $f^{11}(x) = \begin{pmatrix} 6x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ஐ வாய்ப்புப்பார்க்க, இங்கு $f''(x) = \dfrac{d^2 f(n)}{dx^2}$

05.

(a) விரிக்காமல்

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$ எனக்கான்க.

(b) $f(n) = \begin{pmatrix} x & 4 & 1 \\ 3 & x+4 & 2 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$

(c) f(2) ஐயும் f(4) ஐயும் காண்க.

(d) $\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ 4 & x+4 & x \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$ ஐத் தீர்க்க.

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & x+4 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = f^1(x)$ ஐ வாய்ப்புப்பார்க்க.

06.

(a) $\Delta(x) = \begin{pmatrix} a^2 & 1-a^2 & 1+a^3 \\ b^2 & 1-b^2 & 1+b^3 \\ x^2 & 1-x^2 & 1+x^3 \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம் இங்கு a,b ஆகியன வேறுவேறான மாறில்கள்

i. x-a,x-b ஆகியன இன் காரணிகளெனக் காட்டுக.

ii. x இற்குச்சமன்பாடு ஐத் தீர்க்க.

$$\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3-1 \\ y & y^2 & y^3-1 \\ z & z^2 & z^3-1 \end{pmatrix}$$

(b) எல்லா x,y,z உம் வெவ்வேறான பெறுமானங்களைக் கொண்டது $= 0$ ஆகவும் இருப்பின், $xyz = 1$ என நிறுவுக.

07. $\Delta = \begin{pmatrix} 4r & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம் இங்கு $r \varepsilon 1R^{+}$ $\Delta = 2(2r - 1)$ எனக்காட்டுக.

$f(r) = \begin{pmatrix} r^2 & r & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம்.

$f(2r+1) - f(2r-1)$ ஐத்துணிகோவை Δ இன் சார்பில் எழுத்துறைக்க.

$f(2r+1) - f(2r-1) = 4(2r - 1)$ எனக்காட்டுக.

$f(2n+1) - f(1) = 4 \{ 1 + 3 + .. + (2n-1)$ என்பதை உய்த்தறிக சூத்திரம் $1+3+\ldots\ldots+(2n-1) = n^2$

08.

(a) $F(r) = \begin{pmatrix} r & -1 & 0 \\ 1 & r & -1 \\ 3r^2 & 1 & r \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம்

$f(r) - f(r-1) = 3r(r+1)$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n(n+1) = \begin{pmatrix} n/3 & -1 & 0 \\ 1/3 & n & -1 \\ n^2 & 1 & n \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 3 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 4 & -4 & -1-x \end{pmatrix}$ ஐத் தீர்க்க.

09.

(a) $f(r) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ r & 1 & -1 \\ r^2 & r & 1 \end{pmatrix}$ எனின் $f(r) - f(r-1) = 2r+1$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து.

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots.. + (2n+1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ n & 1 & -1 \\ n^2 & n & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x^2+6 & x & -x \\ -x & x^2+6 & x \\ x & -x & x^2+6 \end{pmatrix}$ ஐ மூன்று இருபடிச காரணிகளின் பெருக்கமாக

எடுத்துரைக்க.

10.

(a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^2 & c^3 \end{pmatrix}$ = abc (a-b) (b-c) (c-a) எனக்காட்டுக.

(b) x =0 என்பது சமன்பாடு

$\begin{pmatrix} 4 & x-2 & x-1 \\ x-2 & 2 & 1 \\ 4 & 3x-8 & 2x-4 \end{pmatrix} = 0$ இன் ஒரு தீர்வு என்பதை வாய்ப்புப்பார்க்க. அதோடு மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் மற்றை எல்லா தீர்வுகளைம் காண்க.