GIZ/ESC – Jaffna

Combined Mathematics

1) எறிபொருட்கள் **(Projectiles)**
2) புள்ளிவிபரவியல் **-(Statistics)**
3) துணிகோவைகள் (**Determinants**)
4) தாயங்கள் (**Matrices**)

எறிபொருட்கள் (Projectiles)

எறியற்பாதை

ஒரு துணிக்கையை சாய்வாக வீசும் போது அது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் பரவளைவுப் பாதையில் இயங்கும் இப்பாதை எறியற்பாதை எனப்படும்

எறியல் வேகம்

ஒரு துணிக்கை வீசப்படும் வேகம் எறியல் வேகம் எனப்படும்.

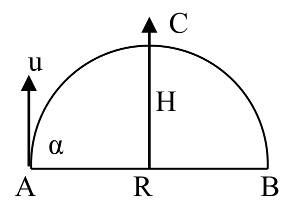
எறியற் கோணம்

ஒரு துணிக்கை வீசப்படும் திசையானது வீசற்புள்ளியினூடான கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் எறியற் கோணம் எனப்படும்

பறப்பு நேரம்

ஒரு துணிக்கை எறியப்பட்ட கணத்திலிருந்து எறியற் புள்ளிக்கூடான கிடைத்தளத்தை அடைய எடுத்த நேரம் பறப்பு நேரம் எனப்படும்.

பறப்பு நேரம் காணல்



$$A \to B \uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = uSin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$= \frac{1}{2}(2uSin\alpha - gt)$$

$t = 0, t = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ பறப்பு நேரம் $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

அதியுயரம் காணல்

$$A \to C \uparrow v^2 = u^2 + 2\alpha s$$

$$0 = (u\sin\alpha)^2 - 2g^H$$

$H = \frac{u^2 Sin^2 \alpha}{2g}$ அதியுயரம் $H = \frac{u^2 Sin^2 \alpha}{2g}$

அதியுயரத்தை அடைய எடுத்த நேரம் காணல்

$A \rightarrow C \uparrow v = u + at$

$0 = u \sin\alpha - gt$

$t = \frac{uSin\alpha}{g}$

கிடைவீச்சை காணல்.

$A \rightarrow C \rightarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

R = u sinαt

$= u\sin\alpha \frac{2uSin\alpha}{g}$

$= u\sin\alpha \frac{2uSin\alpha}{g}$

$R = \frac{u^2 Sin2\alpha}{g}$

R உயர்வாக Sin2α = 1

$2\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ R உயர்வு $= \frac{u^2}{g}$

$Sin2\alpha = Sin2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ என எழுத முயும்.

∴ α = θ அல்லது $\frac{\pi}{2} - \theta$ ஆகும் போதும்

R ஒரே பெறுமானமுடையதாகும்.

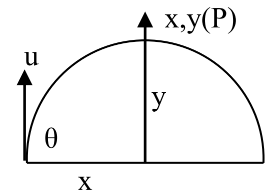
அதாவது கிடையுடன் θ அல்லது $\frac{\pi}{2} - \theta$ கோணத்தில் ஒரே வேகம் u உடன் வீசும் போது ஒரே கிடைவீச்சை பெறமுடியும்.

எறியற் பாதையின் சமன்பாடு காணல்.

$$A \rightarrow P \rightarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

x = ucosθt

$$\uparrow y = uSin\theta t - \frac{1}{2}at^2$$



$$y = uSin\theta\frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2$$

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\theta}$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta)$$

இதுவே எறியற் பாதையின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு :- இது குறித்த x,y பெறுமானத்திற்கு tanθ இன் இருபடிச்சமன்பாடாகும் ஆகவே குறித்த ஒரு புள்ளியூடாக செல்லுமாறு இரு வேறு திசைகளில் துணிக்கை எறியப்படலாம்.

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. பாதையின் சமன்பாடு $y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta)$

2. எறியம் $P(x_1y_1)$ ஊடகச் செல்லின் இப்புள்ளியூடாகச் செல்ல இரு திசைகளில் எறியலாம். திசைகள் αα $\alpha_1, \alpha_2 \tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{x_1}{y_1}$

3. எறியன் வேகம் u உடனும், எறிகோணம் α உடனும் வீசப்பட்ட துணிக்கை (d_1h_1) (d_2h_2) என்ற புள்ளி ஊடகச் செல்லின $\tan\alpha = \frac{d_2^2h_1 - d_1^2h_2.}{d_1d_2(d_2 - d_1)}$ என நிறுவுக.

4. எறிகோணம் α அதியுயர் H எனின் பாதைச் சமன்பாடு $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{4H}\tan\theta\right)$ என நிறுவுக.

5. எறிகோண α வீச்சு R எனின் பாதைச் சமன்பாடு $y = x\tan\alpha\left(1-\frac{x}{R}\right)$

6. அதியுயர் உயரம் H வீச்சு R எனின் $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} - \frac{R^2 y}{4H}$

7. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து பொருளை P(a, b) ஊடாக வீச வேண்டிய நிபந்தனை $u^2 \geq g\left[b+\sqrt{a^2+b^2}\right]$ எனக் காட்டுக. இரு வித்தியாசமான திசைகள் P ஊடாக வீசலாம்.

8. h உயரமுடைய கோபுர உச்சியிலிருந்து ஒரு பொருளை (d,-h) ஊடாக வீச வேண்டிய நிபந்தனை $u^2 \geq g\left[\sqrt{a^2+h^2}-h\right]$

9. ஒரு துணிக்கை h உயர கோபுரத்திலிருந்து u வேகத்துடன் வீசும் போது கோபுர அடி ஊடாக கிடைத்தளத்தில் பெறப்படும் அதியுயர் வீச்சு $\frac{u}{g}\sqrt{u^2+2gh}$

10. அதியுயர் புள்ளியை உற்பத்தியாகக் கொண்ட பாவளைவுஎனக் காட்டல்.

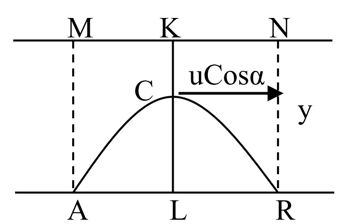
$\rightarrow y = u\cos\alpha t, x = \frac{1}{2}gt^2$

$x = \frac{1}{2}g\frac{y^2}{u^2\cos^2\alpha}$

$y^2 = \frac{2u^2 Cos\alpha}{g}x$

$CS = \frac{u^2 Cos\alpha}{2g}ck$

$CL = \frac{u^2 Sin^2\alpha}{2g}$

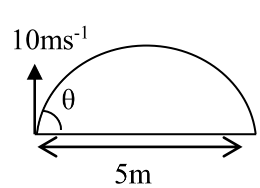


P இன் மேல் செலத்தியின் உயரம் $= CS + CL = \frac{u^2}{2g}$

(1) $10ms^{-1}$ என்ற ஆரம்பக்கதியுடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படும் பொருளொன்றின் எறியற்புள்ளியினூடான கிடைவீச்சு 5m எனின், பொருளிற்கு இரண்டு எறியற் கோணங்கள் உண்டு எனக்காட்டுக. அக்கோணங்களைக் காண்க.

எறியற்கோணம் θ என்க.

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ பிரேயகிக்க



$0 = 10\sin\theta t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$

$t \neq 0,\ 10\sin\theta - 5t = 0$

$t = 2\sin\theta$

$\rightarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2 \leftarrow$ பிரயோகிக்க.

$5 = 10\cos\theta \times 2\sin\theta$

$5 = 10\sin 2\theta$

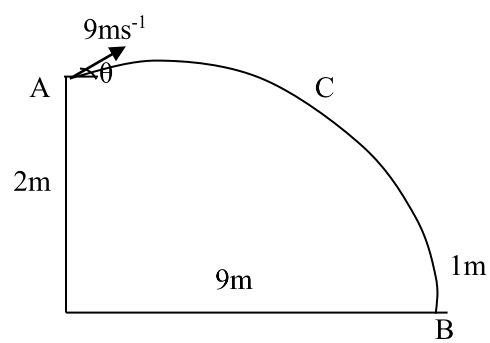
$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

$2\theta = {}^{\pi}/_{6}$ or $2\theta = {}^{5\pi}/_{6}$

$\theta = {}^{\pi}/_{12}$ or $2\theta = {}^{5\pi}/_{12}$

$\therefore {}^{\pi}/_{12}$, ${}^{5\pi}/_{6}$ என்னும் இரு எறியற்கோணங்கள் உண்டு.

(2) இரு சிறுவர்கள் 9m கிடைத்தூரத்தில் நிற்கின்றனர். ஒருவர் 2m உயரத்தில் பந்தொன்றை $9ms^{-1}$ வேகத்துடன் எறிகின்றார். மற்றவர் அதனை 1m உயரத்தில் பிடிக்கின்றார். முதல் சிறுவன் பந்தை எறிந்த திசை கிடையுடன் என்ன கோணத்தை ஆக்கும்? பந்து தரைக்கு மேல் அடைந்த உயரமானது 4.025m இற்கு மேற்படாது எனக்காட்டுக. இங்கு $g = 10ms^{-2}$ எனக்கொள்க.



$A \rightarrow B$ இற்கு

$\rightarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ பிரயோகிக்க.

$9 = 9\cos\theta t$

$$t = \frac{1}{Cos\theta}$$

$A \rightarrow B$ இது $\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ பியோகிக்க.

$$-1 = 9\sin\times\frac{1}{Cos\theta} - \frac{1}{2}\times 10\times\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

$-1 = 9\tan\theta - 5\sec^2\theta$

$-1 = 9\tan\theta - 5(1 + \tan^2\theta)$

$5\tan^2\theta - 9\tan\theta + 4 = 0$

$(5\tan\theta - 4)(\tan\theta - 1) = 0$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} or \tan\theta = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{4}{5} or \theta = 45^0$$

A→ B இது ↑ $V^2 = u^2 + 20s$ ஐ பியோகிக்க.

$0 = (9\sin\theta)^2 - 2(10)h$

$$h = \frac{81\sin^2\theta}{20}$$

$\theta = 45^0$ எனின் $h = \frac{81\times\frac{1}{2}}{20} = \frac{81}{40} = 2.025$

தரைக்குமேல் அடைந்த உயரம் $= 2+2.025 = 4.025m$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ எனின் $h = \frac{81}{20}\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)^2$

$$= \frac{81\times 16}{20\times 41}$$

$$= \frac{324}{205} < 2$$

தரைக்கு மேல் அடைந்த உயரம் $= 2 + \frac{324}{205} < 4$

∴ தரைக்குமேல் அடைந்த உயரமாக 4.025 இற்கு மேற்படாது.

11. ஒரு துணிக்கை O என்னும் புள்ளியிலிருந்து வேகம் u உடன் கிடையுடன் சாய்வில் எறியப்படுகின்றது. OX,OY என்பன கிடை நிலைக்குத்து அச்சுக்களில் எறியப்பாதையின் சமன்பாடு $y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2 Cos^2\theta}$ எனக் காட்டுக. துணிக்கை (a, b), (c, O) என்ற புள்ளிகளுடாகச் சென்றால் $\tan\theta = \frac{bc}{a(c-a)}$ என நிறுவி $v = \left[\frac{9}{2}\frac{b^2c^2 + a^2(c-a)^2}{ab(c-a)}\right]$ எனக்காட்டுக.

(1) 30^0 ஏற்றக் கோணத்தில் 80m/s வேகத்துடன் ஒரு கல்வீசப்படுகின்றது.

a. பயப்பு நேரம்

b. கிடைத்தளத்தில் அதன் வீச்சு

c. அடைந்த அதியுயர் உயரம்

d. அதியுயரத்தை அடைய செலவான நேரம் என்பவற்றைக் காண்க.

(2) $\tan^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)$ என்ற ஏற்றக்கொணத்தில் 25m/s வேகத்துடன் கல் எறியப்படுகின்றது.

a. எவ்வளவு நேரத்தில் 10m உயரத்தை அடையும்.

b. அவ்வுயரத்தில் அதன் வேகம் எவ்வளவு?

(3) 12m உயரமான கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து 30^0 ஏற்றக் கோணத்தில் 14m/s வேகத்துடன் எறியப்பட்ட சிறுகல் எவ்வளவு நேரத்தின் பின் நிலத்தை அடையும் கோபுரத்தை அடியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் கல் விழுந்தது? [g=10]

(4) மட்டமான தரையிலிருந்து ஓர் ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்பட்ட ஒரு கல் 30m தூரத்திலுள்ள 20m உயரமான ஓர் கம்பத்தை கிடையாக மருவியவாறு செல்கின்றது. எறியல் வேகத்தையும் ஏற்றக்கோணத்தையும் காண்க.

(5) 30^0 ஏற்றக்கோணத்தில் 60m/s வேகத்துடன் ஒரு பொருள் வீசப்பட்டால்

a. பறப்பு நேரம்

b. கிடைத்தளத்தில் அதன் வீச்சு

c. அதியுயர் உயரம் என்பவற்றைக் காண்க.

(6) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ என்ற ஏற்றக் கோணத்தில் 49m/s வேகத்துடன் எறியப்பட்டது.

a. பறப்பு நேரம்

b. கிடைத்தளத்தில் வீச்சு

c. அதியுயர் உயரம் என்பவற்றைக் காண்க.

(7) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ என்ற ஏற்றக்கோணத்தில் 78m/s வேகத்துடன் ஏவப்பட்ட ஏவுகணை 2 செக்கன் முடிவில் எத்திசையில் செல்லும்? [g = 9.8]

(8) 60^0 ஏற்றக்கோணத்தில் வீசப்பட்ட கல் 2 செக்கன் முடிவில் 30^0 ஏற்றக்கோணத்தில் சென்றுகொண்டிந்தால் கல்லின் எறியல் வேகம் என்ன?

(9) $2\sqrt{gh}$ வேகத்துடன் 30^0 ஏற்றக் கோணத்தில் வீசப்பட்ட கல் அது இயங்கும் தளத்திற்கு செங்குத்தாகவுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரை செங்கோணத்தில் தாக்கியதாயின் எறி புள்ளிக்கும் சுவருக்கும் இடையிலான தூரம் யாது? நில மட்டத்திற்கு மேல் எவ்வளவு உயரத்தில் கல்படும்?

(10) உயரமான கோபுர உச்சியிலிருந்து 1962cm/s வேகத்துடன் கிடையாக வீசப்பட்ட பொருள் 2 செக்கனில் அடைந்த வேகம் யாது? [$g = 981cm/s^2$]

(11) $2\sqrt{gh}$ வேகத்துடன் 45^0 ஏற்றக்கோணத்தில் வீசப்பட்ட ஒரு பொருள் அது இயங்கும் தளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ளதும் எறி புள்ளியிலிருந்து h தூரத்திலுள்ளதுமான நிலைக்குத்துச் சுவரை மோதுகிறது. மோதும் வேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்து கூறுகளைக் காண்க.

(12) ஏறியில் வேகம் V ஆகவும் பறப்பு நேரம் t ஆகவும் கிடைவீச்சு r ஆகவும் இருப்பின் $4v^2t^2 = g^2t^4 + 4r^2$ என நிறுவுக.

(13) ஒரு பொருள் எறியற் புள்ளியிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள h உயரமான சுவரை நோக்கி v வேகத்துடன் வீசப்படுகின்றது. $v^2 > g\left[h + \sqrt{h^2 + a^2}\right]$ எனின் மட்டுமே பொருள் சுவரைக் கடக்கும் எனக் காட்டுக.

(14) ஓர் எறிபொருளின் கிடைவீச்சு r உம் அதியுயர் h உம் எனின் எறியல் வேகம் $\left[2g\left(h + \frac{r^2}{16h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ என நிறுவுக.

(15) ஒரு நிலைக்குத்து கம்பம் அதன் அடியூடு செல்லும் கிடைத்தளத்திலிருக்கும் புள்ளி A இல் α கோணத்தை ஆக்குகிறது. கிடையுடன் θ_1, θ_2 கோணங்களை ஆக்கும் திசைகளில் இரு துணிக்கைகள் A இல் இருந்து வீசப்படுகின்றன. முதற் துணிக்கை கம்பத்தின் உச்சயில்படும் அதே நேரத்தில் இரண்டாவது துணிக்கை கம்பத்தினடியில் படுகிறது எனின் $\tan\theta_1, \tan\theta_2 = \tan\alpha$ என நிறுவுக.

(16) ஒரு புள்ளியிலிருந்து வீசப்பட்ட துணிக்கை கிடைத்தூரம் a ஐக் கடந்த பின்னர் வீசற்புள்ளியூடான கிடைத்தளத்தைச் சந்திக்கிறது. அது அடைந்த அதியுயரம் b வீசல் வேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்து கூறுகளை a,b இல் காண்க. அது கிடையாக x தூரம் கடந்த பின்னர் எய்திய உயரம் $\frac{4bx(a-x)}{a^2}$ எனக்காட்டுக.

(17) கிரிக்கட் ஆட்டக்காரர் ஒருவர் பந்தொன்றை நிலமட்டத்திலிருந்து நீண்ட திடல் வழியே எறிந்தா R தூரத்திலுள்ள விக்கட் காவலின் பாதத்தில் விழுந்தது. பந்தின் தொடக்க வேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்து கூறுகள் முறையே u,vms^{-1} ஆகும். $UV\frac{Rg}{2}$ எனக் காட்டுக. விக்கட் காவலர் திடலிலுள்ள கிரிக்கட் ஆட்டக்காரனை நோக்கி xm தூரம் சென்றிருந்தால் அவர் அப்பந்தை நிலத்திலிருந்து hm உயரத்தில் பிடித்திருக்கலாம். பந்து விக்கட் காவலரை அடைய எடுத்த நேரம் $R\sqrt{\frac{2h}{gx(R-x)}}$ எனக்காட்டுக.

(18) ஓர் எறிபொருளின் தொடக்க வேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே p,g ஆகும். நேரம் t இற் சென்ற கிடை நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் x,y என்றால் x ஐயும் y யும் t இல் எடுத்துரைக்க. அன்றியும் எய்தப்பெற்ற அதியுயர் உயரம் H ஐயும் எறியற்புள்ளிக்கூடாக ஒரே கிடைத்தளம் மீதுள்ள வீச்சு R ஐயும் காண்க.

(19) ஒரு பொருள் அதன் மேல் நோக்கிய பாதையில் வீசற்புள்ளியிலிருந்து கிடையாக x தூரத்தில் செல்கிறது. வீசற்புள்ளியினூடாக கிடைத்தளத்திலே வீச்சு R அடி எனில் வீசற்கோண ஏற்றம் $\tan^{-2}\left[\frac{y}{x}\frac{R}{(R-x)}\right]$ எனக்காட்டுக.

(20) β சாய்வு கொண்ட ஒரு சாய்தளத்தின் மீது மேல் நொக்கி தளந்தொடர்பான ஏற்றக்கோணம் α உடன் வீசப்பட்ட தோர் எறிபொருளின் வீற்புள்ளியினூடான வீச்சு $R\sec\beta\,(1-\tan\alpha\,\tan\beta)$ எனக் காட்டுக. இங்கு R என்பது தொடர் ஏற்றக்கோணம் α உம் வீசல் வேகமும் அதே பெறுமதியின் ஆகும் போதுள்ள கிடைவீச்சு?

(21) நிலைக்குத்துடன் 2β சாய்ந்துள்ளதொரு தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பாரமான துணிக்கை வீசப்பட்டது. சாய்தளத்தின் அதியுயர் சாய்வுக்கோட்டினூடாகச் செல்லும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தின் மேல் பகுதியிலே அத்துணிக்கை இயங்குகிறது. துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் U CDSβ அதன் தொடக்க இயக்கத் திசை நிலைக்குத்துடன் β சாய்ந்துள்ளது. துணிக்கையின் பறப்பு நேரம் $\frac{u}{g}$ எனவும் தளத்தின் மீது அதன் வீச்சு $\frac{u^2}{2g}$ எனவும் அது தளமீது மோதும் வேகம் எனவும் Usinβ அப்பொழுது அதன் இயக்கத் திசை ஒரு செங்கோணத்தினூடு திருப்பிவிட்டதெனவும் காட்டுக.

(22) கிடையுடன் கோணம் β ஐ ஆக்கும் ஒரு கோட்டிலுள்ளதொரு புள்ளியிலிருந்து அக்கோட்டினைத் தாக்குமாறு ஒரு துணிக்கையானது வேகம் v உடனும் ஏற்றக்கோணம் α உடனும் வீசப்பட்டது. பறப்பின் போது துணிக்கையின் இயக்கத்திசை $\frac{1}{2}Cos\beta \sec\alpha Co\sec(\alpha-\beta)\tan\alpha$ ஐக் கோதான்சனாகவுடையதொரு கோணத்தினூடாகத் திருப்ப முடியும் எனக் காட்டுக.

(23) b உயரமானதொரு சுவரின் அடியிலிருந்து a தூரத்திலுள்ளதொரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பந்து கிடையுடன் α கோணம் ஆக்கும் ஒரு திசையில் v வேகத்துடன் வீசப்படுகின்றது. சுவரின் மேல் எவ்வுயரத்திலுள்ள ள்ளியினூடாகப் பந்து சுவரைத் தாண்டும் எனக் காட்டுக. பந்து சுவரை மட்டுமட்டாகத் தாண்டி சென்றால் எய்தப்பட்ட அதியுயர் உயரம் $\frac{1}{4}\frac{a^2\tan^2\alpha}{(a\tan\alpha-b)}$ எனக் காட்டுக.

(24) ஒரு எறிபொருள் அதன் வீசற்புள்ளியிலிருந்து θ ஏற்றக்கோணத்திலமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியூடாகச் செல்லுதல் வேண்டும். அப்புள்ளியிலே கிடையுடன் β சரிவுள்ள சாய்தளத்தின் மீது செங்குத்தாக மோதவும் வேண்டும். அது வீசப்பட வேண்டிய ஏற்றக்கோணம் α பின்வருமாறு பெறப்படும் எனக் காட்டுக. tanα =Cot +β+2tanθ

(25) α சாய்வுள்ளு தளத்தின் மீது வேகம் v உடனும் ஏற்றக்கோணம் (α + θ) உடனும் வீசப்பட்டு ஓர் அதியுயர் சரிவுக்கோட்டினூடு செல்லும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே இயங்கும் ஒரு குண்டின் வீச்சினைக் காண்க. குண்டு சரிவினைக்கிடையாகத் தாக்கினால் $ran\theta=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(1+Sin^2\alpha)}$ எனக் காட்டுக.

(26) h உயரமுள்ள குண்றின் உச்சியிலிருந்து ஒரு துப்பாக்கி சுடப்பட்டது. குண்டு கடல் மட்டத்தின் மேல் (h+b) என்னும் அதியுயரத்தை அடைந்து குன்றின் அடியிலிருந்து தூரம் a இலே கடலிற்படுகின்றது. துப்பாக்கியின் ஏற்றக்கோணம் பின்வரும் சமன்பாட்டினால் பெறப்படும் எனக் காட்டுக.

(27) ஒரு பந்து இரு சுவர்களைத் தாண்டுமாறு வீசப்படுகின்றது. முதற்சுவர் வீசுற்புள்ளியிலிருந்து தூரம் b இல் இருப்பது. அதன் உயரம் a மற்றது வீசுற்புள்ளியிலிருந்து தூரம் a யிலுள்ளது. அதன் உயரம் b கிடைத்தளவீச்சு $\dfrac{a^2+ab+b^2}{(a+b)}$ எனவும் வீசற்கோணம் $\tan^{-1} 3$ இலும் பெரியதெனவும் காட்டுக.

(28) கிடையான மாறாவேகம் u உடன் H உயரத்தில் ஓர் விமானம் பறக்கிறது.அது கிடைநிலத்திலுள்ளதோர் பீரங்கியை விட்டு விலகப் பறக்கிறது. குண்டானது V வேகத்துடன் θ ஏற்றக்கோணத்தில் விமானத்தை அடிக்குமாறு சுடப்படுகின்றது.சுடப்படுகின்ற கணத்தில் விமானம் குண்டின் பாதையில் இருப்பின் குண்டு விமானத்தை அடிக்கும். $\sqrt{(v^2 Sin^2\theta - 2gH}$ (2v Cosθ = u) = uvSinθ எனின் குண்டு விமானத்தை தாக்கும் என்க் காட்டுக.

(29) கிடையுடன் α சாய்விலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து தளத்திற்குச் ஆன திசையில் v என்ற வேகத்துடன் ஒரு துணிக்கை எறியப்பட்டது. அத்துணிக்கை கிடைத்தரையில்படுகின்றது. தளங்கிடைத்தரையைச் சந்திக்கும் புள்ளியிலிருந்து எறியற்புள்ளியினதும் துணிக்கை தரையை மோதும் புள்ளியினதும் தூரங்கள் ஒவ்வொன்றும் h ஆகும் $2v^2 = ghCot\alpha/2$ எனக்காட்டுக.

(30) கிடையுடன் α சாய்விலுள்ள தளத்திலுள்ள புள்ளியிலிருந்து ஒரு துணிக்கை u எனும் வேகத்துடன் எறியப்பட்டது. இயக்கம் அதியுயர் சரிவ்கோட்டினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிகழ்கின்றது. மேல், கீழ் நோக்கிய அதியுயர் வீச்சுக்கள் முறையே R_1R_2 என்பன $g^2R^2Cos^2 - 2gu^2R + u^4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டினது மூலகங்களாகுமென நிறுவுக. R_3 என்பது கிடைத்தரையிலுள்ள அதியுயர் வீச்சு எனின் $\dfrac{2}{R_3} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ என நிறுவுக.

(31) ஒரு துணிக்கையானது O என்னும் புள்ளியில் இருந்து V அடி / செக்கன் வேகத்துடன் கிடையுடன் θ கோணம் அமைக்க வீசப்படுகின்றது. வீசற்புள்ளியினூடான கிடை நிலைக்குத்து அச்சுக்கள் பற்றி எறியப்பாதையில் சமன்பாடு $y = x\tan\theta \dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\theta$ எனக் காட்டுக.

இரு துணிக்கைகள் O என்னும் புள்ளியில் இருந்து ஒரே வேகம் $\sqrt{ag}$ உடன் ஒரே நிலைக்குத்து தளத்தில் வீசப்படுகின்றது. இல் எறியப்பாதைகள் P என்னும் புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றது. இரு துணிக்கைகளினதும் எறியக்கோணங்கள் α,β ஆயின் O இல் இருந்து P இனது கிடைத்தூரம் $\frac{2a}{\tan\alpha+\tan\alpha}$ எனக் காட்டுக. P ஆனது O இன் மட்டத்திற் மேல் இருப்பின் $\tan\alpha\tan\beta>1$ எனவும் காட்டுக.

(32) கிடைநிலத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி O விற்கு நேர்மேலே h உயரத்தில் ஒரு புண்டு வெடிக்கின்றது. அதன் சன்னங்கள் எல்லாத்திசைகளிலும் ஒரே வேகம் $\sqrt{2gk}$ உடன் வீசப்படுகின்றது. $d<2\sqrt{K(k+h)}$ ஆயின் O இல் இருந்து d தூரத்தில் உள்ள நிலத்தில் நிற்கும் ஒரு சிறு மிருகத்தை சன்னங்கள் இரு முறை இரு திசைகளிலிருந்து வெடித்தலின் பின் வெவ்வேறு நேரங்கள் $t_1,t_2(t_2.t_1)$ களில் அடிக்குமென நிறுவுக. $t_2-t_1=2\left\|\frac{2k+h-\sqrt{h^2+d^2}}{g}\right\|$ எனவும் நிறுவுக.

(33) கிடையடன் α என்ற கோணம் அமைக்கும் தளத்தில் உள்ள புள்ளி A யில் இருந்து துணிக்கை v என்ற வேகத்துடன் எறியப்பட்டது. துணிக்கை A க்கு கீழேயுள்ள புள்ளி B இல் மோதுகின்றது, AB அதிகூடிய பெறுமானத்தை பெறுவதற்கு தேவையான எறியக்கோணத்தைக் காண்க. AB மிகப்பெரியதாய் இருக்கும் போது துணிக்கையின் பாதையில் மிகவுயர்ந்த புள்ளி H ஆகும். t_1t_2 என்பன முறையே துணிக்கை A யில் இருந்து H இற்கும் H இலிருந்து B யிற்கும் செல்ல எடுத்த நேரங்களாயின் $2g^2t_1t_2=V^2(1+\text{Sin}\alpha)$ என நிறுவுக.

(34) ஒரு துணிக்கை V என்ற வேகத்துடன் நிலைக்குத்துடன் α கோணம் அமைக்கும் ஒரு தளத்தின் ஒரு புள்ளியில் இருந்து எறியப்பட்டது. கீழ் முக வீச்சு மிகப்பெரியதாய் இருப்பதற்கு எறியக்கோணம் எவ்வாறிருக்க வேண்டும்? இவ்வீச்சின் அந்தங்களிலுள்ள வேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையெனக் காட்டி, துணிக்கையின் பாதையில் அதியுயர் புள்ளியில் இருந்து கீறப்படும் நிலைக்குத்துக் கோடு இவ்வீச்சை $\tan^{2\alpha}/2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனக் காட்டுக.

(35) ஒரு துணிக்கை O என்னும் புள்ளியில் இருந்து θ என்னும் ஏற்றக்கோணத்தில் u என்ற வேகத்துடன் எறியப்பட்டது. துணிக்கை T என்ற இலக்கை அடிக்கிறது. OT என்பது கிடைக்கு மேலே α இல் சாய்ந்துள்ளது. $OT=\frac{U^2\sec^2\alpha}{g}[\sin(2\theta-\alpha)-\sin\alpha]$ என நிறுவுக. மற்றொரு துணிக்கை O விலிருந்து அதே வேகம் U உடனும் (α > θ)

எறியப்பட்டது. இத்துணிக்கையும் T ஐ அடித்தால் $\phi = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta$ எனக் காட்டுக. இவ்விரு பறப்புக்களுக்கும் இடையில் உள்ள நேர வித்தியாசம் $\frac{2U}{g} Sec\alpha[\sin(\theta - \alpha) - Cos\theta]$ எனவும் காட்டுக.

(36) t = 0 என்னும் நேரத்தில் O என்னும் புள்ளியில் இருந்து இரு சிறிய துணிக்கைகள் P,Q என்பன கிடையுடன் α_1, α_2 என்னும் கோணம் சாய்விலே U_1, U_2 என்னும் வீசல் வேகங்களுடன் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் புவியீர்ப்பில் இயங்க எறியப்படுகின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

a. PQ எப்பொழுதும் ஒரு நிலையான நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்திரமாகும்.

b. வேகங்கள் சமாந்திரமாய் வருவதற்கு எடுத்த நேரம். $= \frac{U_1 U_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{g(U_2 Cos\alpha_2 - U_1 Cos\alpha_1)}$

(37) நிலைக்குத்தான கோபுரம் ஒன்றின் உச்சியில் இருந்து U என்னும் கதியுடன் ஒரு துணிக்கையானது என்னும் கோணத்தை கிடையுடன் ஆக்கும் சாய்தளமொன்றை அடிக்குமாறு வீசப்படுகின்றது. துணிக்கையின் இயக்கத்தைக் கொண்ட நிலைக்குத்துத் தளம் சாய்தளத்தின் அதியுயர் சாய்வுக்கோடு ஒன்றினூடாகச் செல்லுகின்றது. அச்சரிவுக்கோட்டுடன் எறியற்திசை ஆக்கும் கோணம் α ஆகும். சாய்தளத்தின் அடிக்கும் கோபுரத்தின் அடிக்கும் இடையில் உள்ள தூரம் 2d ஆகும். கோபுரத்தின் உயரம் d ஆகும். ஆயின் மட்டுமே சாய்தளத்தை துணிக்கை செங்குத்தாக அடிக்குமென நிறுவுக. சாய்தளத்தின் துணிக்கை அடிக்கும் புள்ளிக்கும் சாய்தளத்தின் அடிக்கும் இடையில் உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(38) கிடைத்தரையில் உள்ள புள்ளியொன்றில் இருந்து ஒரு துணிக்கை 2a தூரத்தில் உள்ள நிலைக்குத்துச் சுவரை செங்குத்தாக அடிக்குமாறு எறியப்பட்டது. அதன் ஆரம்ப வேகம் $U \frac{U^2}{2g} = y + \frac{a^2}{y}$ ஆகவும் இருப்பின் என நிறுவுக. கல் பறப்பதற்குத் தேவையான மிகக் குறைந்த சாத்தயமான வேகம் $\sqrt{2ag}$ என காட்டுக. எறியல் வேகம் $\sqrt{5ag}$ ஆயின் துணிக்கை எறியப்பட வேண்டிய சாத்தியமான கிடையடன் ஆக்கும் கோணங்களை காண்க.

(39) ஒரு நிலைக்குத்துக் கம்பம் அதன் அடியினூடு செல்லும் ஒரு கிடைத்தளத்திலிருக்கும் புள்ளி A இல் α கோணத்தை ஆக்குகின்றது. கிடையுடன் θ_1 θ_2 கோணங்களை ஆக்குந்

திசைகளில் இரு துணிக்கைகள் A இலிருந்து வீசப்படுகின்றன. முதற்துணிக்கை கம்பத்தின் உச்சியிற்படும் அதே சமயத்தில் இரண்டாவது கம்பத்தின் அடியிற்படுகிறது. $\tan\theta_1 - \tan\theta_2 = \tan\alpha$

(40) ஒரு தரப்பட்ட வேகத்திற்குரிய அதியுயர் கிடைவீச்சு R என்றால் வீசற்கோணத்தின் தான்சன் 1 அல்லது 3 ஆக இருக்கும் போது கிடைநிலைக்குத்துத் தூரங்கள் முறையே ½ R, ¼ R ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியினூடே செல்லுமாறு ஒரு துணிக்கையை வீசலாம் எனக் காட்டுக. இரண்டாவது சந்தர்ப்பத்தில் கிடைத்தளவீச்சு 3/5R எனவுங்காட்டுக.

(41) ஒரு துணிக்கையானது O என்னும் புள்ளியில் இருந்து um/s வேகத்துடன் கிடையுடன் α கோணம் அமைக்க வீசப்படுகின்றது. வீசற்புள்ளியினூடான கிடைநிலைக்குத்து அச்சுக்கள் பற்றி எறியப்பாதையின் சமன்பாடு $y = x\tan\alpha - = \frac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ எனக் காட்டுக.

பாதையில் உள்ள புள்ளி P இலே பாதையின் திசை கிடையடன் β கோணம் அமைகுமாயின் $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{2y}{x}$ என உய்த்தறிக.

P ஊடாகச்செல்லும் இயல்தகு பாதைகள்

இரண்டு இருப்பதுடன் அவ்விருபாதைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணமாகவும் இருப்பின் $x^2 - 2y - \frac{u^2 y}{g} = 0$ எனக் காட்டுக.