

திரிகோண கணிதம் **Trigonometric**

திரிகோண கணிதம்

1.0 பாகைக்கும் ஆரையனிற்கும் இடையிலான தொடர்பு

180° ஆனது ஆரையனில் குறிக்கப்படும்போது π^c இனால் குறிக்கப்படும்.

அதாவது

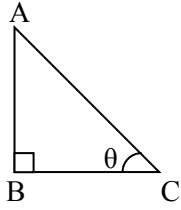
$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi^c \\ 1^\circ &= \left(\frac{\pi}{180}\right)^c \end{aligned}$$

உதாரணம்

பின்வருவனவற்றை ஆரையனில் தருக.

- i. $60^\circ = \frac{\pi}{180} \times 60 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$
- ii. $90^\circ = \frac{\pi}{180} \times 90 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$
- iii. $18^\circ = \frac{\pi}{180} \times 18 = \left(\frac{\pi}{10}\right)^c$
- iv. $120^\circ = \frac{\pi}{180} \times 120 = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^c$
- v. $300^\circ = \frac{\pi}{180} \times 300 = \left(\frac{5\pi}{3}\right)^c$

திரிகோண கணிதத் தொடர்புகள்



சைன் θ	$= \sin \theta$	$= \frac{\text{எ.ப}}{\text{செ.ப}} = \frac{AB}{AC}$
கோசைன் θ	$= \cos \theta$	$= \frac{\text{அ.ப}}{\text{செ.ப}} = \frac{BC}{AC}$
தான் θ	$= \tan \theta$	$= \frac{\text{எ.ப}}{\text{அ.ப}} = \frac{AB}{BC}$
கோசீக θ	$= \text{Cosec } \theta$	$= \frac{\text{செ.ப}}{\text{எ.ப}} = \frac{AC}{AB}$
சீக θ	$= \sec \theta$	$= \frac{\text{செ.ப}}{\text{அ.ப}} = \frac{AC}{BC}$
கோதான் θ	$= \cot \theta$	$= \frac{\text{அ.ப}}{\text{எ.ப}} = \frac{BC}{AB}$

1.1 திரிகோண கணித அடிப்படைத் தொடர்புகள்

$$* \sin \theta \operatorname{Cosec} \theta = 1$$

$$* \cos \theta \sec \theta = 1$$

$$* \tan \theta \cot \theta = 1$$

$$* \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$* \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$* 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$* 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{Cosec}^2 \theta$$

உதாரணம்

1. $(1 - \cos \theta)(1 + \sec \theta) = \sin \theta \tan \theta$ என நிறுவுக

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= (1 - \cos \theta)(1 + \sec \theta) \\ &= (1 - \cos \theta) \left(1 + \frac{1}{\cos \theta} \right) \\ &= (1 - \cos \theta) \left(\frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin \theta = \tan \theta \cdot \sin \theta = R.H.S \end{aligned}$$

2. $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$

$$\begin{aligned} \text{L. H.S} &= \sin^3 \theta + \cos^3 \theta \\ &= (\sin \theta)^3 + (\cos \theta)^3 \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \\ &= R. H. S \end{aligned}$$

$$3. \quad \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \sqrt{\frac{(1 - \cos A)}{(1 + \cos A)}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos A)^2}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos A)^2}{\sin^2 A}} \\ &= \frac{1 - \cos A}{\sin A} \\ &= \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \operatorname{Cosec} A - \cot A \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{\cos A}{1 - \tan A} - \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{\cos A}{1 - \tan A} - \frac{\sin A}{1 - \cot A} \\ &= \frac{\cos A}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A - \sin A} \\ &= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos A - \sin A} \\ &= \frac{(\cos A - \sin A)(\cos A + \sin A)}{\cos A - \sin A} \\ &= \cos A + \sin A \\ &= \text{R. H. S} \end{aligned}$$

5. $(1 + \cot A - \operatorname{Cosec} A) (1 + \tan A + \sec A) = 2$

L.H.S = $(1 + \cot A - \operatorname{Cosec} A) (1 + \tan A + \sec A)$

$$= \left(1 + \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin A + \cos A - 1}{\sin A}\right) \left(\frac{\cos A + \sin A + 1}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A - 1}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1 + 2 \sin A \cos A - 1}{\sin A \cos A}$$

$$= 2 = \text{R. H. S}$$

1.1 பயிற்சிகள்

1 $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = \sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta - 2$

2 $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

3 $\frac{\operatorname{cosec} A}{\cot A + \tan A} = \cos A$

4 $(\sin A + \cos A) (\cot A + \tan A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

5 $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \sin^4 \theta \sec^2 \theta$

6 $x = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad y = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ எனின்

i. $xy = 1$ எனவும்

ii. $x + y = 2 \operatorname{cosec} \theta$ எனவும் காட்டுக.

iii. $1/y - 1/x = x - y$ என்பதை உய்த்தறிக.

7 $x = \tan \theta + \sin \theta$

$y = \tan \theta - \sin \theta$ எனின் $x^2 - y^2 = 4 \sqrt{xy}$ எனக்காட்டுக.

8 $x = r \cos \theta \sin \alpha \quad y = r \cos \theta \cos \alpha, \quad Z = r \sin \theta$ எனின் $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ எனக்காட்டுக.

9 $(\sin \alpha + \operatorname{cosec} \alpha)^2 + (\cos \alpha + \sec \alpha)^2 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 7$

10 $a = 2 \cos \theta + 3 \sin \theta$

$b = 3 \cos \theta + 2 \sin \theta$ எனின் $(3a - 2b)^2 + (2a - 3b)^2 = 25$ எனக்காட்டுக.

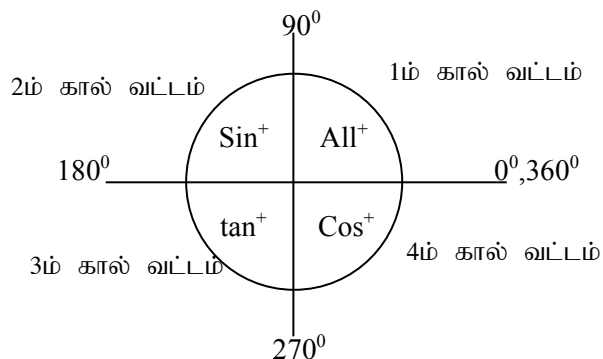
1.2 முக்கிய சில கோணங்களின் திரிகோண கணிதப் பெறுமானங்கள்

கோணம்	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

நேர்க் கோணத்திற்கும் மறைக்கோணத்திற்கும் இடையிலான தொடர்பு

- ❖ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- ❖ $\cos(-\theta) = +\cos\theta$
- ❖ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
- ❖ $\operatorname{Cosec}(-\theta) = -\operatorname{Cosec}\theta$
- ❖ $\sec(-\theta) = +\sec\theta$
- ❖ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

கால் வட்டக்கோணங்களின் குறிகள்



Note:-

- i) கோணங்கள் 90° இன் ஒற்றை மடங்குடன் கூட்டலாக or கழித்தலாகவரின் கால் வட்டக் குறியுடன் sin எனின் Cos, Cos எனின் Sin, tan எனின் Cot என்றவாறு அமையும்.
- ii) கோணங்கள் 90° இன் இரட்டை மடங்குடன் கூட்டலாக or கழித்தலாகவரின் கால் வட்டக் குறியுடன் Sin எனின் Sin, Cos எனின் Cos, tan எனின் tan என்றவாறு அமையும்.

உதாரணம்

$$\begin{aligned} 1 \quad \sin 135^\circ &= \sin(90 + 45) \\ &= \cos 45 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \cos 210^\circ &= \cos(180 + 30) \\ &= -\cos 30 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \tan 330^\circ &= \tan(360 - 30) \\ &= -\tan 30 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \cot 240^\circ &= \cot(270 - 30) \\ &= \cot 30 \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

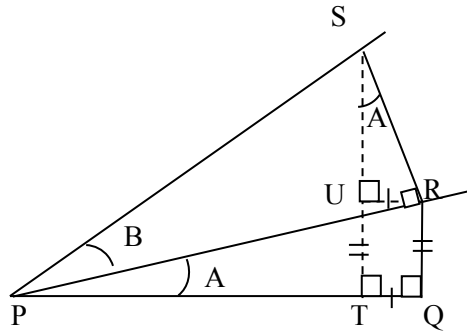
$$\begin{aligned} 5 \quad \operatorname{cosec} 150^\circ &= \operatorname{cosec}(180 - 30) \\ &= \operatorname{cosec} 30^\circ \\ &= 2 \end{aligned}$$

1.3 கூட்டல் குத்திரங்கள்

$$1. \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$2. \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$3. \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$



$$\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \frac{ST}{PS} \\
&= \frac{SU + UT}{PS} \\
&= \frac{SU}{PS} + \frac{UT}{PS} \\
&= \frac{SU}{SR} + \frac{SR}{PS} + \frac{UT}{PR} \cdot \frac{PR}{PS}
\end{aligned}$$

$$\sin(A+B) = \cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B$$

$$\begin{aligned}
\cos(A+B) &= \frac{PT}{PS} \\
&= \frac{PQ - TQ}{PS} \\
&= \frac{PQ}{PS} - \frac{TQ}{PS} \\
&= \frac{PQ}{PR} \cdot \frac{PR}{PS} - \frac{TQ}{SR} \cdot \frac{SR}{PS}
\end{aligned}$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\begin{aligned}
\tan(A+B) &= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} \\
&= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}
\end{aligned}$$

மேலும் கீழும் $\cos A \cos B$ ஆல் வகுக்க.

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

உதாரணம்

$$\begin{aligned}
1 \quad \sin 75^\circ &= \sin(45 + 30) \\
&= \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$2 \quad \cos 75^\circ = \cos(45 + 30)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

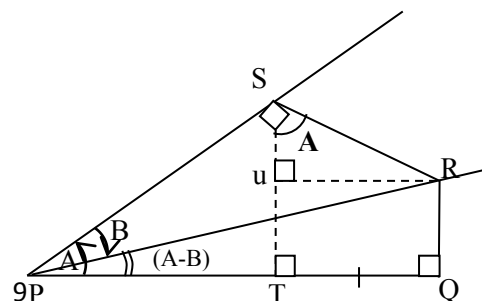
$$\begin{aligned} &= \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45 \tan 30} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \sin (45 + A) \cos (45 - B) + \cos (45 + A) \sin (45 - B) \\ &= \sin (45 + A + 45 - B) \\ &= \sin (90 + A - B) \\ &= \cos (A - B) \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \sin(n+1)A \sin(n-1)A + \cos(n+1)A \cos(n-1)A \\ &= \cos(n+1)A \cos(n-1)A + \sin(n+1)A \sin(n-1)A \\ &= \cos[(n+1)A - (n-1)A] \\ &= \cos[nA + A - nA + A] \\ &= \cos 2A \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

$$\sin(A - B) = \frac{RQ}{PR}$$



$$\frac{ST - SU}{PR}$$

$$\frac{ST}{PR} - \frac{SU}{PR}$$

$$\frac{ST}{PS} \cdot \frac{PS}{PR} - \frac{Su}{SR} \cdot \frac{SR}{PR}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

$$\cos(A-B) = \frac{PQ}{PR}$$

$$= \frac{PT + TQ}{PR}$$

$$= \frac{PT}{PR} + \frac{TQ}{PR}$$

$$= \frac{PT}{PS} \cdot \frac{PS}{PR} + \frac{UR}{SR} \cdot \frac{SR}{PR}$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$\cos A$, $\cos B$ ஆல் மேலும் கீழும் வகுக்க.

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

உதாரணம்

$$\begin{aligned} 1 \quad \sin 15^\circ &= \sin(45 - 30) \\ &= \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \quad \cos 15^\circ &= \cos(45-30) \\
&= \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

1.3 பயிற்சிகள்

1. $\sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$ எனக்காட்டுக
இதிலிருந்து $\sin^2 37^\circ - \sin^2 7^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ எனக்காட்டுக
2. $A + B = 45^\circ$ எனின் $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ எனக்காட்டுக.
இதிலிருந்து $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$ எனக்காட்டுக
3. $\tan \alpha = 1/3, \tan \beta = 1/7$ ஆகுமாறு α, β கூர்ங்கோணங்கள் ஆகும்.
 $\tan(\alpha + \beta)$ இன் பெறுமானத்தை கணித்து $2\alpha + \beta = 45^\circ$ எனக்காட்டுக
4. $\sin(60 + A) \cos(15 - A) + \cos(60 + A) \sin(15 - A) = \sin 75$
5. $\cos(30 + A) \cos(30 - A) - \sin(30 + A) \sin(30 - A) = \frac{1}{2}$

1.4 திரிகோண கணித கூட்டல் கழித்தல் தொடர்பான மேலும் சில வடிவங்கள்

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \longrightarrow 1$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \longrightarrow 2$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \longrightarrow 3$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \longrightarrow 4$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \Rightarrow 2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \Rightarrow 2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$\left. \begin{aligned} A + B &= C \\ A - B &= D \end{aligned} \right\} \text{என்க}$$

$$2A = C + D \Rightarrow A = \frac{C + D}{2}$$

$$2B = C - D \Rightarrow B = \frac{C - D}{2}$$

$$\sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C - D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C - D}{2}\right)$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C - D}{2}\right)$$

$$\cos D - \cos C = 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C - D}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos C - \cos D &= -2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C - D}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{C + D}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{D - C}{2}\right) \end{aligned}$$

உதாரணம்

$$1. \frac{\sin 7A - \sin A}{\sin 8A - \sin 2A} = \cos 4A \sec 5A \text{ எனக்காட்டுக.}$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{2 \cos 4A \sin 3A}{2 \cos 5A \sin 3A} = \frac{\cos 4A}{\cos 5A} \\ &= \cos 4A \sec 5A \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

$$2. \frac{\sin A + \sin 2A}{\cos A - \cos 2A} = \cot \frac{A}{2} \text{ எனக்காட்டுக}$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{2 \sin \frac{3A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{3A}{2} \sin \frac{A}{2}} \\ &= \cot \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$3. \frac{\tan 5\theta + \tan 3\theta}{\tan 5\theta - \tan 3\theta} = 4 \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{\frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} + \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}}{\frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} - \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}} \\ &= \frac{\cos 3\theta \sin 5\theta + \sin 3\theta \cos 5\theta}{\cos 3\theta \sin 5\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta} \\ &= \frac{\sin 8\theta}{\sin 2\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(4\theta + 4\theta)}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{\sin 4\theta \cos 4\theta + \cos 4\theta \sin 4\theta}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{2 \sin 4\theta \cos 4\theta}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{2 \sin(2\theta + 2\theta) \cos 4\theta}{\sin 2\theta} = \frac{4 \sin 2\theta \cos 2\theta \cos 4\theta}{\sin 2\theta} \\
&= 4 \cos 2\theta \cos 4\theta = \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

4. $\frac{\sin A - \sin 5A + \sin 9A - \sin 13A}{\cos A - \cos 5A - \cos 9A + \cos 13A} = \cot 4A$ எனக்காட்டுக.

$$\begin{aligned}
L.H.S &= \frac{2 \sin 5A \cos 4A - 2 \sin 9A \cos 4A}{2 \sin 5A \sin 4A - 2 \sin 9A \sin 4A} \\
&= \frac{2 \cos 4A - (\sin 5A - \sin 9A)}{2 \sin 4A (\sin 5A - \sin 9A)} \\
&= \cot 4A \\
&= L.H.S
\end{aligned}$$

5. $\frac{\sin 8\theta \cos \theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= \frac{2 \sin 8\theta \cos \theta - 2 \sin 6\theta \cos 3\theta}{2 \cos 2\theta \cos \theta - 2 \sin 3\theta \sin 4\theta} \\
&= \frac{\sin 9\theta + \sin 7\theta - \sin 9\theta - \sin 3\theta}{\cos 3\theta + \cos \theta - \cos \theta + \cos 7\theta} \\
&= \frac{\sin 7\theta - \sin 3\theta}{\cos 3\theta + \cos 7\theta} \\
&= \frac{2 \cos 5\theta \sin 2\theta}{2 \cos 5\theta \cos 2\theta} \\
&= \tan 2\theta \\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

1.4 பயிற்சிகள்

1. $\sin(45 + A) \sin(45 - A) = \frac{1}{2} \cos 2A$
2. $2 \cos \frac{\pi}{13} - \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{\pi}{13} = 0$
3. $\cos(360 - A) \cos(360 + A) + \cos(54 + A) \cos(54 - A) = \cos 2A$
4. $\frac{2 \sin(A - C) \cos C - \sin(A - 2C)}{2 \sin(B - C) \cos C - \sin(B - 2C)} = \frac{\sin A}{\sin B}$
5. $\cos 2\theta \cos \theta/2 - \cos 3\theta \cos 9\theta/2 = \sin 5\theta \sin 5\theta/2$
6. $\frac{\sin(A + 3B) + \sin(3A + B)}{\sin 2A + \sin 2B} = 2 \cos(A + B)$

1.5 மடங்குக் கோணங்கள்

1. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$A = B = \theta$ எனப்பிரதியிட

$$\sin 2\theta = \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$$

$$\boxed{\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$\cos^2 \theta$ ஆல் மேலும் கீழும் வகுக்க.

$$\boxed{\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}}$$

2. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$A = B = \theta$ எனப்பிரதியிட

$$\cos 2\theta = \cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \sin \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \end{aligned}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

மேலும் கீழ்ப் $\cos^2 \theta$ ஆல் வகுக்க.

$$\boxed{\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$3. \quad \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

$A = B = \theta$ எனப்பிரதியிட

$$\tan 2\theta = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \cdot \tan \theta}$$

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cdot \cos^2 \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cdot \cos \theta - \sin 2\theta \cdot \sin \theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \tan 3\theta &= \tan(2\theta + \theta) \\ &= \frac{\tan 2\theta + \tan \theta}{1 - \tan 2\theta \cdot \tan \theta} \\ &= \frac{\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} + \tan \theta}{1 - \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \cdot \tan \theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \tan \theta + \tan \theta + \tan^3 \theta}{1 - \tan^2 \theta - 2 \tan^2 \theta}$$

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

உதாரணம்:

$$1. \quad \frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} \\ &= \frac{2 \sin A \cos A}{2 \sin^2 A} \\ &= \cot A \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

$$2. \quad \tan A + \cot A = 2 \operatorname{cosec} 2A$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \tan A + \cot A \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A} \\ &= \frac{1 \times 2}{2 \sin A \cos A} \\ &= \frac{2}{\sin 2A} \\ &= 2 \operatorname{cosec} 2A \\ &= R.H.S. \end{aligned}$$

$$3. \quad \operatorname{cosec} 2A + \cot 2A = \cot A$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \operatorname{cosec} 2A + \cot 2A \\ &= \frac{1}{\sin 2A} + \frac{\cos 2A}{\sin 2A} \\ &= \frac{1 + \cos 2A}{\sin 2A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cos^2 A}{2 \sin A \cos A} \\
&= \cot A \\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} \\
&= \frac{2 \sin^2 \left(\frac{A+B}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)}{2 \sin^2 \left(\frac{A+B}{2} \right) - 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)} \\
&= \frac{2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \left[\sin \left(\frac{A+B}{2} \right) + \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]}{2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \left[\sin \left(\frac{A+B}{2} \right) - \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]} \\
&= \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} \\
&= \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

$$5. \quad \cos \alpha \cos(60 - \alpha) \cdot \cos(60 + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= \cos \alpha \cdot \cos(60 - \alpha) \cos(60 + \alpha) \\
&= \frac{1}{2} \cos \alpha [2 \cos(60 - \alpha) \cos(60 + \alpha)] \\
&= \frac{1}{2} \cos \alpha [\cos 120 + \cos 2\alpha] \\
&= \frac{1}{2} \cos \alpha \left[-\frac{1}{2} + 2 \cos^2 \alpha - 1 \right] \\
&= \frac{1}{2} \cos \alpha [2 \cos^2 \alpha - \frac{3}{2}] \\
&= \frac{1}{4} [4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha] \\
&= \frac{1}{4} \cos 3\alpha \\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

1.5 பயிற்சிகள்

1. $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$ எனக்காட்டுக.
2. $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$ எனக்காட்டுக.
3. $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta \cos 2\theta} = \tan \theta$ எனக்காட்டுக.
4. $\operatorname{Cosec} A - 2 \cot 2A \cos A = 2 \sin A$ எனக்காட்டுக.
5. $\sin 3A + \sin 2A - \sin A = 4 \sin A \cos^{A/2} \cos^{3A/2}$ எனக்காட்டுக.
6. $\frac{\sin(A+B) - 2\sin A + \sin(A-B)}{\cos(A+B) - 2\cos A + \cos(A-B)} = \tan A$ எனக்காட்டுக.
7. $2\cos^{11/32} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ எனக்காட்டுக.
8. $\cos 20 + \cos 100 + \cos 140 = 0$ எனக்காட்டுக.
9. $\sin 10 + \sin 20 + \sin 40 + \sin 50 = \sin 70 + \sin 80$
10. $\frac{\sec 4A - 1}{\sec 2A - 1} = \frac{\tan 4A}{\tan 2A} \cdot \frac{\tan 4A}{\tan 2A}$
11. $\frac{\sin(n+1)A - \sin(n-1)A}{\cos(n+1)A + 2\cos nA + \cos(n-1)A} = \tan\left(\frac{A}{2}\right).$
12. $\operatorname{Cosec} A - 2 \cot 2A - \cos A = 2 \sin A$
13. $\frac{\cos 2\theta + \sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}{1 + \sin 2\theta + \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}.$
14. $\frac{1 + \tan^2(45 - A)}{1 - \tan^2(45 - A)} = \operatorname{Cosec} 2A.$
15. $\sin 2\theta, \cos 3\theta$ இன் விரிவுகளை எழுதுக.

இதிலிருந்து i. $\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ எனவும்

ii. $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2}$ எனவும்

iii. $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ எனவும்

iv. $\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2}$ எனவும் காட்டுக.

16. $A + B + C = 180^\circ$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

- (1) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
- (2) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$
- (3) $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \sin C$
- (4) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- (5) $(\sin B + \sin C) \tan \frac{A}{2} - (\sin B - \sin C) \cot \frac{A}{2} = 2 \cos B$

➤ $-1 \leq \sin, \cos \leq 1, -\infty \leq \tan \leq +\infty$

1.6 பொதுத்தீர்வுகள்

- 1) $\sin \theta = \sin \alpha$ எனின்
 $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha, n \in \mathbb{Z}$
- 2) $\cos \theta = \cos \alpha$ எனின்
 $\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in \mathbb{Z}$
- 3) $\tan \theta = \tan \alpha$ எனின்
 $\theta = n\pi + \alpha, n \in \mathbb{Z}$

உதாரணம்

1. $\sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$
 $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$
2. $\tan \theta = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
 $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$
3. $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0$
 $2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x - 3 = 0$$

$$(2\cos x + \sqrt{3})(\cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$2\cos x = -\sqrt{3} \quad \text{or} \quad \cos x = \sqrt{3} \quad (\text{பொருந்தாது})$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$x = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

4. $\cos^2 \theta - \sin \theta - \frac{1}{4} = 0$

$$1 - \sin^2 \theta - \sin \theta - \frac{1}{4} = 0$$

$$4 - 4\sin^2 \theta - 4\sin \theta - 1 = 0$$

$$4\sin^2 \theta + 4\sin \theta - 3 = 0$$

$$(2\sin \theta + 3)(2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{2} \quad \text{or} \quad \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

இது பொருந்தாது $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$

5. $\tan^2 \theta - (1 + \sqrt{3}) \tan \theta + \sqrt{3} = 0$

$$\tan^2 \theta - \tan \theta - \sqrt{3} \tan \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\tan \theta (\tan \theta - 1) - \sqrt{3} (\tan \theta - 1) = 0$$

$$(\tan \theta - 1)(\tan \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\tan \theta = 1 \quad \text{or} \quad \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$= \tan \frac{\pi}{4} \quad = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = n_1\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \theta = n_2\pi + \frac{\pi}{3}; \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

6. $\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$

$$\tan \theta + \tan 2\theta = \sqrt{3} (1 - \tan \theta \tan 2\theta)$$

$$\frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{1 - \tan \theta \tan 2\theta} = \sqrt{3}$$

$$\tan 3\theta = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{1}{3} \left(n\pi + \frac{\pi}{3} \right); \quad n \in \mathbb{Z}$$

$a \cos \theta + b \sin \theta = c$ இனது பொதுத்தீர்வு

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \theta \cdot \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos \beta$$

$$\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$$

$$\theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha \quad n \in \mathbb{Z}$$

θ இற்கு மெய்தீர்வுகள் சாத்தியமாவதற்கு $|\cos \beta| \leq 1$ ஆகவேண்டும்.

$$\rightarrow \cos^2 \beta \leq 1$$

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

Note:- $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ எனும்சமன்பாடு θ இற்கு மெய்தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்க

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \text{ ஆக வேண்டும்}$$

உதாரணம்

$$1. \quad \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta \cos \frac{\pi}{6} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \quad \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta = 1$$

$$\cos \theta \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \cos 0$$

$$(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2n\pi \pm 0$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3. \quad \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4. \quad \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos A; \quad A - \text{மாற்றிலி}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \cos A$$

$$\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \cos A$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos A$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm A$$

$$x = 2n\pi \pm A + \frac{\pi}{4}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5. \quad 6\cos x + 8\sin x = 9$$

$$\frac{6}{10}\cos x + \frac{8}{10}\sin x = \frac{9}{10}$$

$$\cos x \cdot \cos \alpha + \sin x \cdot \sin \alpha = \frac{9}{10}$$

$$\cos(x - \alpha) = \cos \beta$$

$$x - \alpha = 2n\pi \pm \beta$$

$$x = 2n\pi \pm \beta + \alpha; \quad n \in \mathbb{Z}$$

1.6 பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றின் பொதுதீர்வுகளை காண்க.

1. $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$
2. $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$
3. $\tan 3\theta = \tan \theta$
4. $\tan 5\theta = -\tan 2\theta$
5. $\tan 4\theta = \cot \theta$
6. $\tan 8\theta \tan 2\theta = 1$
7. $\cos 5\theta = \sin 2\theta$
8. $\sin 2\theta = \cos \theta$
9. $\cos \theta \cos 3\theta - 1 = 0$
10. $2\sin \theta \sin 3\theta - 1 = 0$
11. $\cos 3x + 4\cos x - 2 = 0$
12. $\tan 4\theta = \tan \theta + \tan 3\theta$
13. $\cos 6\theta \cos 2\theta - \cos 3\theta \cos \theta = 0$
14. $\sin \theta + \sin(\theta + \pi/3) + \sin(\theta + 2\pi/3) = 0$
15. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ என எடுத்து $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ என நிறுவி

$\tan^2 \theta + 2\cos 2\theta - 1 = 0$ இன் தீர்வுகளைக் காண்க.

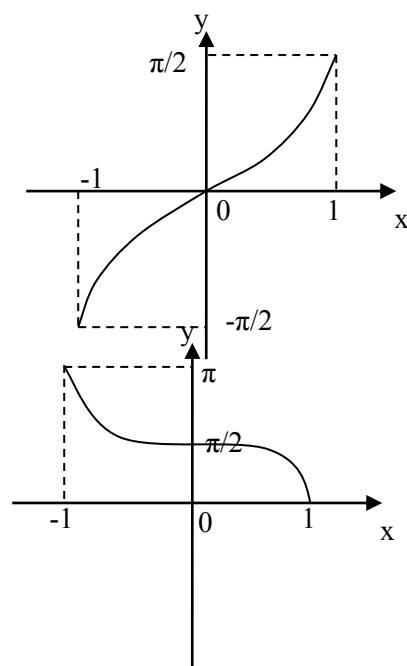
16. $\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
17. $\cos \theta + \sin \theta = 1$
18. $\operatorname{Cosec} \theta + \cot \theta = \sqrt{3}$
19. $3\sin 2\theta + 2\sin^2 \theta = 2$
20. $2[\cos \theta + \sin \theta] = \sqrt{3} + 1$
21. $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$
22. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2$
23. $\sin x \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$
24. $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$
25. $\frac{1}{4\sin x - 3\cos x + 6}$ என்பதன் மிக உயர்ந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

1.7 திரிகோணகணித நேர்மாறு சார்புகள்

1 $y = \sin^{-1} x$

இங்கு $-1 \leq x \leq 1$

மேலும் $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ஆகமாறு y வரையப்படுகிறது.

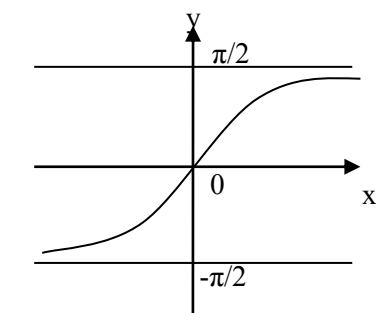


2 $y = \cos^{-1} x$

$-1 \leq x \leq 1$ ஆகும்

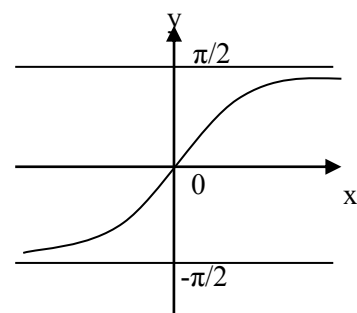
$\rightarrow 0 \leq y \leq \pi$ ஆகமாறு

y வரையப்படுகிறது.



3 $y = \tan^{-1} x ; x \in \mathbb{R}$

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ என வரையறுக்கப்படும் வரைபை வரைதல்



உதாரணம்

1. $\sin^{-1} \frac{3}{5} - \cos^{-1} \frac{12}{13} = \sin^{-1} \frac{16}{65}$ எனக்காட்டுக.

$\sin^{-1} \frac{3}{5} = \alpha, \cos^{-1} \frac{12}{13} = \beta, \sin^{-1} \frac{16}{65} = \gamma$ என்க

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{12}{13}, \sin \gamma = \frac{16}{65}$

$\alpha - \beta = \gamma$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \gamma$

$L.H.S = \sin(\alpha - \beta)$

$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}$

$= \frac{36 - 20}{65}$

$= \frac{16}{65}$

$$= \sin \gamma$$

$$= R.H.S$$

2

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{8}{17} = \sin^{-1} \frac{77}{85}$$

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} = \alpha, \sin^{-1} \frac{8}{17} = \beta, \sin^{-1} \frac{77}{85} = \gamma \text{ என்க}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{8}{17}, \sin \gamma = \frac{77}{85}$$

$$\alpha + \beta = \gamma$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$$

$$L.H.S = \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{77}{85}$$

$$= \sin \gamma$$

$$= R.H.S$$

3.

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2} \text{ எனின் } xy + yz + zx = 1 \text{ எனக்காட்டுக}$$

$$\tan^{-1} x = \alpha, \tan^{-1} y = \beta, \tan^{-1} z = \gamma \text{ என்க.}$$

$$\tan \alpha = x, \tan \beta = y, \tan \gamma = z$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \cot \gamma = \frac{1}{\tan \gamma}$$

$$\frac{x + y}{1 - xy} = \frac{1}{z}$$

$$xz + yz = 1 - xy$$

$$xy + yz + zx = 1$$

4. $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$ இனைத்தீர்த்து x ஐக் காண்க.

$$\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \beta \text{ என்க.}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\frac{2x + 3x}{1 - 2x \cdot 3x} = 1$$

$$5x = 1 - 6x^2$$

$$6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$(6x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{6} \text{ or } x = -1 \text{ பொருந்தாதது}$$

$$x = \frac{1}{6}$$

5 $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ எனின் $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ எனக்காட்டுக.

$$\cos^{-1}x = \alpha, \cos^{-1}y = \beta, \cos^{-1}z = \gamma \text{ என்க.}$$

$$\cos \alpha = x, \cos \beta = y, \cos \gamma = z$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\alpha + \beta = \pi - \gamma$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos \gamma$$

$$x \cdot y - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} = -z$$

$$xy - z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$$(xy - z)^2 = 1 - y^2 - x^2 + x^2 y^2$$

$$x^2 y^2 - 2xyz + z^2 = 1 - y^2 - x^2 + x^2 y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$$

1.7 பயிற்சிகள்

1. $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{253}{325}\right)$ எனக்காட்டுக.
2. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$ எனக்காட்டுக.
3. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ எனக்காட்டுக.
4. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$ எனக்காட்டுக.
5. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{3}$ எனின் $x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4}$ எனக்காட்டுக.
6. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ எனின் $yz + zx + xy = 1$ எனக்காட்டுக.
7. $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{17}\right) = \frac{\pi}{4}$ எனக்காட்டுக.

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக.

1. $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}2$
2. $\tan^{-1}2x - \tan^{-1}x = \cot^{-1}(4-4x^2)$
3. $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1}x$
4. $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \pi/4$
5. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \pi/3$
6. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$
7. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$