நுண்கணிதம்
Calculus

நுண்கணிதம் (Calculus)

1. எல்லைகள்
2. வகையீடு
3. வகையீட்டின் பிரயோகம்
4. தொகையீடு
5. தொகையீட்டின் பிரயோகம்.

அலகு 1

எல்லைகள் (Limits)

முடிவிலியின் இயல்புகள்

a முடிவுள்ள கணியம் எனின்

$a + \alpha = \alpha$

$\alpha - a = \alpha$

$\alpha . a = \pm \alpha \; (a \gtrless 0)$

$$\frac{\alpha}{a} = \pm \propto \; (a \gtrless 0)$$

$\infty . \alpha = \infty$

$$\frac{a}{\alpha} = 0$$

$$\frac{a}{0} = \alpha, a \neq 0$$

$\alpha + \propto = \propto$

கணிதத்தில் வரையறுக்கப்படாத எண்கள் (தேராவடிவங்கள்)

$$\frac{0}{0}, \frac{\alpha}{\alpha}, \alpha - \alpha, 0 \times \alpha$$

உதாரணம்

1. $\lim_{x \to 0} (x^2 + 2x + 3) = 0 + 0 + 3$

$= 3$

2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)=\frac{0+1}{0-1}=-1$

உதாரணம்

எல்லைகளைக் காண்க.

1. $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)=\infty+1$

$=\infty$

2. $\lim_{x\to\infty}(x^2+x)=\infty+\infty=\infty$

உதாரணம்

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)$

$=4$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 2}(x^2+x+1)$

$=3$

3. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}(2x+1)$

$=2$

4. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-5}{x-2}\right)$

$=\frac{-4}{-1}=4$

பயிற்சிகள்

எல்லைகளைக் காண்க.

1. $\lim_{x\to 2}(x^2-3x)$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x+1/x}{x-1/x}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

4. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$

5. $\lim_{x\to \alpha}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$

தேற்றம் :-

$\lim_{x\to \alpha} f(x)=l_1 \lim_{x\to a} g(x)=l'$ என்க

a, l, l' ε1R k- மாறிலி

i. $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=l+l'$

ii. $\lim_{x\to a}\{kf(x)\}=k\lim_{x\to a} f(x)=kl$

iii. $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=l+l'$

iv. $\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{l'}(l'\neq 0)$

தேற்றம் :- $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ ஆகும்

இங்கு n நேர்முழுஎண், மறைமுழுஎண், பின்னம்.

நிறுவல் :- வகை I :- n – நேர்முழு எண்.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+.....+a^{n-1})}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})$$

$$= \lim_{x\to a} x^{n-1} + a\lim_{x\to a} x^{n-2} + ... + \lim_{x\to a} a^{n-1}$$

$= a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots\ldots\ldots.. + a^{n-1}$

$= na^{n-1}$

வகை ii :- n மறை முழுஎண் (n<0)

n=-n இங்கு m >0

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^{-m} - a^{-m}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}m - \frac{1}{a}m}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-1}{x^m a^m}\frac{(x^m - a^m)}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-1}{x^m a^m}\lim_{x\to a}\frac{(x^m - a^m)}{(x-a)}$$

$$= \frac{-1}{a^{2m}}.ma^{m-1}$$

$= (-m)a^{-m-1}$

$= na^{n-1}$

வகை iii ;- n பின்னம்

n=p/q என்க. இங்கு p, q ϵ z

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^{p/q} - a^{P/q}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\left(x^{1/q}\right)^P - \left(a^{P/q}\right)^P}{\left(x^{1/q}\right)^q - \left(a^{1/q}\right)^q}$$

$$= \lim_{y\to b}\frac{y^P - b^P}{y^q - b^q}$$

இங்கு $x^{1/q} = y, a^{1/q} = b$

$$= \lim_{y \to b} \frac{y^P - b^P}{y - b} \cdot \frac{y - b}{y^q - b^q}$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{y^P - b^P}{y - b} \cdot \frac{1}{\lim_{y \to b} \frac{y^q - b^q}{y - b}}$$

$$= pb^{P-1} \frac{1}{q.b^{q-1}}$$

$$= \frac{P}{q}(a^{1/q})^{P-q}$$

$$= \frac{P}{q}(a^{1/q - 1})$$

$= na^{n-1}$

உதாரணம் :-

எல்லைகளைக் காண்க.

01. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = 2.2^{2-1} = 4$$

02. $$\lim_{x \to 16} \frac{x^{1/4} - 2}{x - 16} = \lim_{x \to 16} \frac{x^{1/4} - 16^{1/4}}{x - 16}$$

$$= \frac{1}{4}.16^{1/4 - 1}$$

$$= \frac{1}{4}.16^{-3/4}$$

$$= \frac{1}{32}$$

03. $$\lim_{x \to 16} \frac{x^7 - a^7}{x^5 - a^5} = \lim_{x \to a} \frac{x^7 - a^7}{x - a} \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{x^5 - a^5}{x - a}}$$

$$= 7a^{7-1} \cdot \frac{1}{5a^{5-1}}$$

$$= \frac{7}{5}a^2$$

பயிற்சிகள்

எல்லைகளைக் காண்க.

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{16}-1}{x^{8}-1}$$

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^{3}-27}$$

3. $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{3\sqrt{x}-3\sqrt{a}}$$

4. $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

உதாரணம் :-

எல்லைகளைக் காண்க.

1. $$\lim_{x\to\infty}(x^{2}-x)=\lim_{x\to\infty}x(x-1)$$
$$=\infty$$

2. $$\lim_{x\to\infty}(x^{3}-100x^{2})=\lim_{x\to\infty}x^{2}(x-100)$$
$$=\infty$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+{}^{1}\!/_{x}}$$
$$=1$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{lx^{2}+mx+n}{ax^{2}+bx+c}=\lim_{x\to\infty}\frac{l+m/x+m/x^{2}}{a+b/x+1/x^{2}}$$
$$=l/a$$

பயிற்சிகள் :- எல்லைகளைக் காண்க.

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^{2}+1}$$

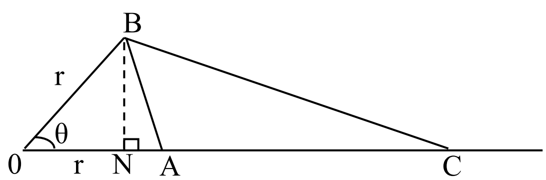
2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{3}}{x^{2}+1}$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}$$

4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

தேற்றம்:- $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ஆகும். இங்கு θ ஆரையனில் அளக்கப்படுகின்றது.

நிறுவல் :-



தரப்பட்ட கோணம் θ வை ஆரைச் சிறையாகவுடைய OAB எனும் ஆரைச்சிறையை வரைக. இதனது ஆரைகள் r என்க. ஆரைச்சிறைக்கு B யில் வரையப்பட்ட தொடலி நீட்டப்பட்ட OA யை C யில் சந்திக்கின்றது.

ΔOAB இன் பரப்பு < ஆரைச்சிறை OAB யிற் பரப்பு < ΔOBC இன் பரப்பு

$\frac{1}{2}.r.r\text{Sin }\theta < \frac{1}{2} r^2\theta < \frac{1}{2}.r.r \tan\theta$

$\sin\theta < \theta < \tan\theta$

$0 < \theta < x/2$ ஆக $\sin\theta > 0$

$$1 \langle \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0} 1 > \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} > \lim_{\theta\to 0} \cos\theta$$

$$1 > \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} > 1$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Note :- $\therefore \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$ ஆகும்

நிறுவல் $\therefore \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} . \frac{1}{\cos\theta}$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் காண்க.

1. $$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2}{\tan x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{1 + \tan^2 x - 2}{\tan x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{\tan^2 x - 1}{\tan x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} (\tan x + 1)$$

$$= 2$$

2. $$\lim_{x \to \pi/2} (\sec\theta - \tan\theta) \lim_{x \to \pi/4} \frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{1}{\left(\sec^2\theta + \tan^2\theta\right)}$$

$$= \frac{1}{\alpha}$$

$$= 0$$

3. $$\lim_{x \to \pi/4} \frac{Sinx - \cos x}{x - \pi/4}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right]}{x - \pi/4}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x \to \pi/4} \frac{\sin(x - \pi/4)}{x - \pi/4}$$

$$= \sqrt{2} \times 1$$

$$= \sqrt{2}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin x\frac{(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{(1-\cos^2 x)}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)Cosx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)Cosx}$$

$$=1\times 1\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

5. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}(1+\sin x)$$

$$=2$$

6. $$\lim_{\theta\to\pi/6}\frac{\cot^2\theta-3}{Co\sec\theta-2}$$

$$=\lim_{\theta\to\pi/6}\frac{\cos ec^2\theta-4}{Co\sec\theta-2}=\lim_{\theta\to\pi/6}(\cos ec\theta+2)$$

$$=4$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^3-(1-x^3)}{x^3\left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}\right)}$$

$$=\frac{2}{2}$$

$=1$

8. $\lim_{\theta \to \pi/4} (1 - \tan x)\sec 2x$

$= \lim_{\theta \to \pi/4} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos 2x}$

$= \lim_{\theta \to \pi/4} \frac{(Cosx - \sin x)}{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}$

$= \lim_{\theta \to \pi/4} \frac{1}{\cos x(\cos x + \sin x)}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{2}{\sqrt{2}}}$

$= 1$

9. $\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{1 - \sqrt{x}}{(\cos^{-1} x)^2} \right\}$

$= \lim_{\theta \to 1} \frac{1 - \sqrt{\cos\theta}}{\theta^2}$: $\cos^{-1}x = \theta$ என்க: $x = \cos\theta$

$= \lim_{\theta \to 0} \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^2 (1 + \sqrt{\cos\theta}}$

$= \lim_{\theta \to 0} \cdot \frac{1 - \cos^2\theta}{\theta^2} \frac{1}{(1 + \cos\theta)(1 + \sqrt{\cos\theta}}$

$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \lim_{\theta \to 0} \cdot \frac{1}{(1 + \cos\theta)(1 + \sqrt{\cos}\theta)}$

$= 1 \times \frac{1}{2 \times 2}$

$= \frac{1}{4}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(2\sin x)}{1 - \cos 2x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(2\sin x)}{2\sin^2 x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(2\sin x)}{2\sin^2 x}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin(2\sin x)}{(2\sin x)} \right]^2$$

= 2x 1

= 2

11. $$\lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{(\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} (\cos x - \sin x)$$

$$= 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}$$

= 0

12. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5 + x^2} - \sqrt{5}}{\sqrt{20 + \sin^2 x} - \sqrt{20}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left\lfloor \sqrt{5 + x^2} - 5 \right\rfloor}{(20 + \sin^2 x - 20)} \cdot \frac{\left\lfloor \sqrt{20 + \sin^2 x} + \sqrt{20} \right\rfloor}{\left[\sqrt{5 + x^2} + \sqrt{5} \right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left\lfloor \sqrt{20 + \sin^2 x} + \sqrt{20} \right\rfloor}{\left[\sqrt{5 + x^2} + \sqrt{5} \right]}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2} \cdot \frac{2\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{1} \times 2$$

= 2

பயிற்சி :

பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் காண்க.

1. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sec\theta - 1}{\tan^2\theta}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1 - \cos x}{x \tan x}$

3. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)$

4. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{6x}$

5. $\lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$

6. $\lim_{x \to \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$

7. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{4\sqrt{2} - (\cos x + \sin x)^5}{1 - \sin 2x}$

8. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{(\cos^5 x - \sin^5 x)}{\cos 2x}$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[4]{\cos 2x}}{x^2}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x + x \sin 3x}{x^2}$

அலகு -2

வகையீடு **Differentiation.**

$f(x)$ என்பது x இன் ஒரு சார்பு என்க.

$\Delta x \to 0$ ஆக $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ இன் எல்லைப் பெறுமான x ஐக் குறித்து $f(x)$ இன் வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது பெறுமதி எனப்படும் இது $f(x)$ இனால் குறிக்கப்படும்.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

அல்லது.

y என்பது x இன் ஒருசார்பு என்க. x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் sx இற்கு y இல் மாற்றம் sy எனின் $\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}$ என்பது x ஐக் குறித்து y இன் வகையீட்டுக்குணகம் அல்லது பெறுதி எனப்படும்.

இது $\dfrac{dy}{dx}$ இனால் குறிக்கப்படும். $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}$ அதாவது ஆகும்.

y = f(x) ஆயின். $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}=\dfrac{dy}{dx}$

உதாரணம் : பின்வருவனவற்றின் பெறுதிகளை முதற் தத்துவத்திலிருந்து காண்க.

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xy\Delta y-xy}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x+\Delta x\to x}\frac{(x+\Delta x)^{1/2}-x^{1/2}}{(x+\Delta x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x)=x^2+5x+5$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+5-[x^2+5x+5]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x) + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 5)$$

$= 2x+5$

பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றை முதல் தத்துவத்தில் இருந்து வகையிடுக.

i. $X^{2/5}$

ii. $(3x-1)^{-3}$

iii. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

அட்சரகணிதச் சார்புகளின் வகையீடு

தேற்றம் :- x^n இன் x குறித்த வகையீட்டுக்குணகம் nx^{n-1} ஆகும்.

அதாவது $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

நிறுவல் $f(x) = x^n$ என்க

$$f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$$

$$\lim_{x+\Delta x \to x} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x) - x}$$

$=nx^{n-1}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$$

உதாரணம் :- (1) $y = x^5$

$$\frac{d}{dx} = 5x^4$$

(2) y= $x^{-2/5}$

$$\frac{d}{dx} = \frac{-2}{5} x^{-7/5}$$

பயிற்சிகள்:- பின்வரவனவற்றை x குறித்துவகையிடுக.

i. X^{10}

ii. $X^{5/3}$

iii. $1/x^n$

Note : மாறிலியின் வகையீடு 0 ஆகும்.

அதாவது $\frac{d(C)}{dx} = 0$

இங்கு c- மாறிலி

தேற்றம் f(x), g(x) என்பன x கள் இரு சார்புகள் எனின்

1. $$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} + \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

2. $$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} - \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

3. $$\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}\{g(x)\} + g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

4. $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x).}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\} + f(x)\frac{d}{dx}\{g(x)\}}{\{g(x)\}^2}$$

5. $$\frac{d}{dx}\{cf(x)\} = C\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

இங்கு C- மாறிலி

நிறுவல் F(x) = f(x) .g(x)

$$F'(x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right] + g(x)\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[g(x+\Delta x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x). \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x).\frac{d}{dx}\{g(x)\} + g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

= f(x).g'(x) + g(x) f'(x)

$F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ என்க

$$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x).g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)\left[f(x+\Delta x) - f(x) - f(x)\right]}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)[g(x) - g(x+\Delta x)]}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= g(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= -f(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= g(x)f'(x)\frac{1}{\{g(x)\}^2} = f(x)g'(x)\frac{1}{\{g(x)\}^2}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக

1. $3x^7$

$y = 3x^7$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}x^7$$

$= 3x7x^b$

$= 21x^6$

2. $4x^5 - 3x^3$

$y = 4x^5 - 3x^3$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times 5 \times 4 - 3 \times 3x^2$$

$= 20x^4 - 9x^2$

3. $(x^3+1)(2x^2-1)$

$y = (x^3+1)(2x^2-1)$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}(2x^2-1) + (2x^2-1)\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$= (x^3+1)(2 \text{ x } 2x) + (2x^2-1)(3x^2)$

4. $\frac{\left(x^2+3\right)}{\left(2x-1\right)}$

$y = \frac{x^2+3}{2x-1}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(x^2+3) - (x^2+3)\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(2x) - (x^2+3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 6}{(2x-1)^2}$$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றை ஒகுறித்து வகையிடுக.

1. $7x^9 + 5x^6 + 4x^3 - 2x - 1$

2. $\left(= \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$

3. $= \frac{1}{ax^2} + \frac{1}{bx^3} + \frac{1}{cx^2} + \frac{1}{dx} + \frac{1}{e}; a, b, c, d, e$ மாறிலிகள்

தேற்றம் :- $\frac{d}{dx}\{f(x)\}^n = n\{f(x)\}^{n-1}.f'(x)$

நிறுவல் $F(x) = \{f(x)\}^n$. என்க.

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x\} - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x\}^n - \{f(x)\}^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x\}^n - \{f(x)\}^n}{[f(x+\Delta x) - f(x)]} \times \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{f(x+\Delta x) \to f(x)} \frac{\{f(x+\Delta x\}^n - \{f(x)\}^n}{[f(x+\Delta x) - f(x)]} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$$

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

01. $(3x^3+4)^4$

$y = (3x^3+4)^4$ என்க.

$$\frac{dy}{dx} = 4(3x^3+4)^3 \frac{d}{dx}(3x^3+4)$$

$$= 4(3x^3+4)^3(9x^2)$$

02. $(px+q)^5$; p, q மாறிலிகள்

$y = (px+q)^5$ என்க

$$\frac{dy}{dx}5(px+q)^4(p)$$

பயிற்சிகள் :

1. $(20x^4+3x^2+1)^4$
2. $(ax^2 + bx + c)^3$; a,b,c மாறிகள்

தேற்றம் :- ஒரு சார்பினது சார்பின் வகையீடு y என்பது z இன் ஒரு சார்பாகவும் z என்பது x இன் ஒரு சார்பாகவும் இருப்பின்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$$ ஆகும்.

உதாரணம் : $y = z^4, Z = x^5+5x$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ இனைக் காண்க.

$$\frac{dy}{dz} = 4z^3$$

$$\frac{dz}{dx} = 5x^4 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$$

$= 4z^3.(5x^4+5)$

$= 4(x^5+5x)^3(5x^4+5)$

திரிகோண கணித சார்புகளின் வகையீடு.

1. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

4. $\frac{d}{dx}\cos ecx = \cos ecx \cot x$

5. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

6. $\frac{d}{dx}\cot x = -\cos ec^2 x$

நிறுவல்

1. f(x) = sinx

$$f'(x) \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \underset{\frac{\Delta x}{2}\to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

= cos x

$$\frac{d}{dx}\sin x = -\cos x$$

2. f(x) =cos x

$$f'(x) \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

= -sin x

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

3. f(x) = tanx

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos x . \cos x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tan x = -\sec^2 x$$

4. f(x) = cosecx

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cos ec(x+\Delta x) - \cos ecx}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin x - \sin(x+\Delta x)}{\Delta x \sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \underset{\frac{\Delta x}{2}\to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \times \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$= -1 \times \frac{\cos x}{\sin x . \sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos ecx = -\cos ecx \cot x$$

5. f(x) = secx

$$f'(x) \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\sec(x+\Delta x) - \sec x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\cos x - \cos(x+\Delta x)}{\Delta x \cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x \cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$= \underset{\frac{\Delta x}{2}\to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \times \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$= -1 \times \frac{\sin x}{\cos x . \cos x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sec x \tan x$$

6. f(x) = cos x

$$f'(x) \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\cot(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{\frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{\cot x}{\sin x}}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin[x-(x-\Delta x)]}{\Delta x \sin(x+\Delta x)\sin x}$$

$$= -\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{1}{\sin(x+\Delta x)\sin x}$$

$$= -1 \times \frac{1}{\sin x.\sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cot x = -\cos ec^2 x$$

Note : $\frac{d}{dx}(\sin kx) = \cos kx.k$

$= \text{k} \cos \text{k}x$

Eg :- $\cos(x)^2$ ஐ முதல் தத்துவத்தில் இருந்து வகையிடுக.

$f(x) = \cos x^2$

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cos(x+\Delta x)^2 - \cos x^2}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{2\sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2 + x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{x^2-(x+\Delta x)^2}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= 2\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2 + x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= 2\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2 + x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{\Delta x(\Delta x+2x)}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= -2\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2 + x^2}{2}\right] \underset{\frac{\Delta x(\Delta x+2x)}{2} \to 0}{Lt} \frac{Sin\frac{[4x(\Delta x+2x)]}{2}}{\frac{[4x(\Delta x+2x)]}{2}} \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta x(\Delta x+2x)}{2\Delta x}$$

$= -2\sin x^2 \text{ x } 1\text{x x}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cos^2 = -2x\sin x^2$$

பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றை முதல் தத்துவத்தில் இருந்து வகையிடுக.

iv. $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

v. $\tan x^2$

vi. $\text{Cos}[f(x)]$

பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

iv. $\text{Sin}10x$

v. $\text{Sec } 3x$

vi. $\cos\sqrt{x}$

vii. $\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)$

viii. $x^3 \tan x$

ix. $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

x. $\sec 2x.\ \tan 2x$

xi. $(2+\cos x)^4$

xii. $\frac{x^2}{\sec x}$

xiii. $\sqrt{\sin x}$

தேற்றம்.

i. $y = \sin^{-1}x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ஆகும்.

இங்கு $-\pi/2 \le y \le \pi/2 \quad -1 \le +x \le 1$

ii. $y = \cos^{-1}x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ஆகும்.

இங்கு $0 \le y \le \pi \ -1 \le +x \le 1$

iii. $y = \tan^{-1}x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$ ஆகும்.

இங்கு $-\pi/2 < y < \pi/2 \quad -\infty \le x \le \infty$

நிறுவல்

1. y = $\sin^{-1}$x

$\Rightarrow$ sin y =x

x குறித்து வகையிடுக.

$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$ $\qquad \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$ $\qquad = 1 - x^2$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \cos y = \sqrt{1-x^2}, \because \cos y > 0$

2. y = $\cos^{-1}$x

$\rightarrow$ cos y = x

x குறித்து வகையிடுக $\qquad \sin^2 y = 1 - \cos^2 y$

$-\sin y \frac{dy}{dx} = 1$ $\qquad = 1 - x^2$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$ $\qquad \sin y = \sqrt{1-x^2}, \because \sin y > 0$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. y= $\tan^{-1}$x

$\rightarrow$ tna y =x

x குறித்து வகையிடுக.

$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$

$= \frac{1}{1+x^2}$

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

1. $\sin^{-1}(x^2)$

$y = \sin^{-1}(x^2)$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}2x$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

2. $\cos^{-1}\{f(x)\}$

$y = \cos^{-1}\{f(x)\}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}f'x$$

3. $\tan^{-1}(3x)$

$y=\tan^{-1}(3x)$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3x)^2}3$$

$$= \frac{3}{1+9x^2}$$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

1. $\sin^{-1}(\cos x)$

2. $\tan^{-1}\left[\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right]$

3. $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$

அடுக்குக்குறிச்சார்பு, மடக்கைச் சார்புகளின் வகையீடு.

e^x இனுடைய விரிவு பின்வருமாறு அமையும்.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots\dots + \dots\dots\frac{x^n}{n!} + \dots\dots\dots$$

Note :- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ ஆகும்

தேற்றம் :- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

நிறுவல் :- $f(x) = e^x$ என்க

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$= x^x x1$

$= e^x$

தேற்றம்:- $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

நிறுவல் :- $y = \ln x$

$e^y = x$

இருபுறமும் x குறித்து வகையிடுக.

$$e^y . \frac{d}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

1. e^{3x}

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right) = e^{3x} 3 = 3e^{3x}$$

2. e^{x^2+1}

$y = e^{x^2+1}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+1}.2x = 2xe^{x^2+1}$$

3. $e^{\cos x}$

$y = e^{\cos x}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = l^{\cos x}(-\sin x)$$

4. $e^{\sin^{-1} x}$ $e^{\sin\text{-}1}x$

$y = e^{\sin^{-1} x}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1} x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. $xe^{\tan x}$

$y = xe^{\tan x}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = xe^{\tan x}\sec^2 x + e^{\tan x}.1$$

$$= e^{\tan x}(x\sec^2 x + 1)$$

$$= e^{\tan x}(x\sec^2 x + 1)$$

6. $\ln x^3$

$y = \ln x^3$ என்க

$y = 3\ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}$$

7. $\ln\sqrt{x}$

$y = \ln\sqrt{x}$ என்க

$$y = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

8. $\ln(\ln x)$

$y = \ln(\ln x)$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$$

9. $x^{\sin x}$

$y = x^{\sin x}$ என்க

$\ln y = \ln x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x . \ln x$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = \sin x . \frac{1}{x} + \ln x \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left\{ \frac{1}{x} \sin x + \ln x \cos x \right\}$$

10. 2^x

$y=2^x$ என்க

$\ln y = \ln^{2x}$

$\ln y = x \ln 2$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = \ln 2.1$$

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வரையிடுக.

1. $x^2 e^{\sqrt{x}}$
2. $e^{2x+1} . \sin x$
3. $e^{x \sec x}$

4. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

5. $\ln\left[\dfrac{x}{x-\sqrt{1+x^2}}\right]$

6. $\ln(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})$

7. $\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

அடுத்தடுத்த வகையீடு

x குறித்த y ன் முதலாம் பெறுதி $\dfrac{dy}{dx}$ ஆகும் இரண்டாம் மூன்றாம்.. பெறுதிகள் முறையே $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}$............என்றவாறு குறிக்கப்படும்.

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d^2y}{dx^2}-y$ இன் x குறித்த 2ம் வகையீடு

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^3}\right)=\dfrac{d^3y}{dx^3}$ -y இன் x குறித்த 3ம் வகையீடு

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றில் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ களைக் காண்க.

1. $y = x^7 + 2x^3$

$$\frac{dy}{dx}=7x^6+2\times 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=7x^6+6x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=7\times 6x^5+6\times 2x$$

$$=42x^5+12x$$

2. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}(1+x^2)^{-3/2}.2x$$

$$= \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

3. y = sin x

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

பயிற்சிகள்

1. y = lnx எனின் $\frac{d^2y}{dx^2}$ இனைக் காண்க.

2. y= $\sin^2$x எனின் $\frac{d^2y}{dx^2}$ களைக் காண்க.

3. $y = e^{x^2+1}$ எனின் $\frac{d^3y}{dx^3}$ இனைக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சிகள்

01. பின்வருவனவற்றில் $\frac{dy}{dx}$ இனைக் காண்க.

   i. x^2Sinxy+ycosx = 2

   ii. xsecy+ycosx+3xy = 4

02. y(1-x) = x^2 எனின்.

   (1-x)$\frac{d^2y}{dx^2}$ -2 $\frac{dy}{dx}$ =2 என நிறுவுக.

03. (3) x = Sint,y = Sin(mt) எனின்,

   (1-x^2)$\frac{d^2y}{dx^2}$ -x $\frac{dy}{dx}$ +m^2y =0 என நிறுவுக.

04. (4) x^2+y^2=2y ஆகும்.

   i. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-y}$ என நிறுவுக.

ii. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1-y)^3}$ என நிறுவுக.

iii. x = 0 ஆக $\frac{d^2y}{dx^2}$ இனைக் காண்க.

05. $x = a(1 - \sin\theta)$

y = a(1- cos θ) எனின்,

i. $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$

ii. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}\,\mathrm{co\ sec}^4\frac{\theta}{2}$ எனவும் காட்டுக

06. y = sin(sinx) எனின்,

i. $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x\,\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$ எனக் காட்டுக

07. $y = \sin^{-1}x$ எனின், $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ எனக் காட்டுக.

08. $e^{\tan^{-1}x}$ என்பதை $\cos^{-1}x$ குறித்து வகையிடுக.

09. $y = \tan^{-1}x$ எனின்,$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$ எனக் காட்டுக.

10. $y = e^{a\sin^{-1}x}$ எனின், $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$ எனக்காட்டுக.

11. $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ எனின்,

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ எனக் காட்டுக.

12. $Y = xe^{-3x}$ எனின்,

$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$ எனக்காட்டுக

13. $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) + \tan^{-1}(xy) = 7\pi/12$

x=1 ஆக $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

14. Y=ln(secx) ; |x| <π/2 என்க

i. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2y}$, எனவும்

ii. $\frac{d^3y}{dx^3} = 2e^{2y}\frac{dy}{dx}$ எனவும்

iii. $\frac{d^4y}{dx^4} = 2e^{2y}(3e^{2y} - 2)$ எனவும் காட்டுக.

iv. $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^6y}{dx^6}\right)_{x=0}$ என்பவற்றைக் காண்க.

15. $y = e^{\sin x}$ எனின்

i. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ ஐக் கணிக்க.

ii. $\frac{d^2y}{dx^2} = y(Cos^2 x - \sin x)$ எனக் காட்டுக.

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ ஐக் கணிக்க.

16. $y = e^{k\sin^{-1}x}$ எனின் $\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{1-x^2} = ky$ எனக்காட்டுக: இங்கு k ஒரு மாறிலி.

$x = \frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும் போது $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

17. x = t – sin t, y=1 –cos t எனின் $t \neq 2n\pi, n\varepsilon Z$ இற்கு $Y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

எனக்காட்டுக.

18. $y = e^{4x}\sin 3x$ எனின், $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0$ எனக்காட்டுக.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

19. y = $e^{\cos x}$ எனின் $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0} \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

20. y = $e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ எனக்கொள்வோம் $\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)$ எனக்காட்டுக.

$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ ஆக இருக்குமாறு p,q என்னும் இரு எண்களைத் துணிக. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ ஐக் காண்க.

21. $x = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$ எனின் $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 1 = 0$ எனக்காட்டுக.

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

22. y = $(1+4x^2)\tan^{-1}(2x)$ எனக்கொள்வோம்

i. $(1+4x^2)\frac{dy}{dx} - 8xy = 2(1+4x^2)$ எனவும்.

ii. $(1+4x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 8y = 16x$ எனவும் காட்டுக.

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ ஐக் காண்க.

23. $y=e^x\cos x$ ஆயின்

i. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}e^x \cos(x + \pi/4)$ எனவும்

ii. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos(\pi/4 + x)$ எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\frac{d^3y}{dx^3}$ ஐ உய்த்தறிக $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}$ என்பவற்றைக் காண்க.

24.

(a) முதற் கோட்பாடுகளை உபயோகித்துச் சார்பு $f(x) = \tan x$ இன் x குறித்த பெறுமதியைக் காண்க. $0<x<1$ ஆகும் போது x குறித்த $\tan(\sin^{-1}x)$ ஐ வகையிடுக.

(b) y ஆனது u இன் ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பாயும் $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ஆகும் போது u=ln(cosx) ஆயும் இருப்பின் $\sin^3 x\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x\frac{dy}{dx}$ எனக் காட்டுக.

25.

(a) முதற்கோட்பாடுகளை உபயோகித்துச் சார்பு f(x) = cos(g(x)) இன் x குறித்த பெறுமதியைக் காண்க. x குறித்து $\cos(\tan^{-1}x)$ ஐ வகையிடுக.

(b) x -y = Yln$x$ எனின்

i. $(1+1nx)^2\frac{dy}{dx} = \ln x$ எனவும்

ii. $x(1+1nx)^3\frac{d^2y}{dx^2} = 1-\ln x$ எனவும் காட்டுக.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

26.

(a) முதற்கோட்பாடுகளை உபயோகித்துச் சார்பு f(x) = sin{g(x)} இன் x குறித்த பெறுமதியைக் காண்க.

(b) $y=(\sin^{-1}x)^2+a\sin^{-1}x$ எனின் $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ எனக் காட்டுக.

27. $y = e^{-x}\sin\left(\sqrt{3x}\right)$ எனின், $(\frac{dy}{dx} = -2e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ எனக் காட்டுக.

28. Siny =xsin(a+y) எனின்.

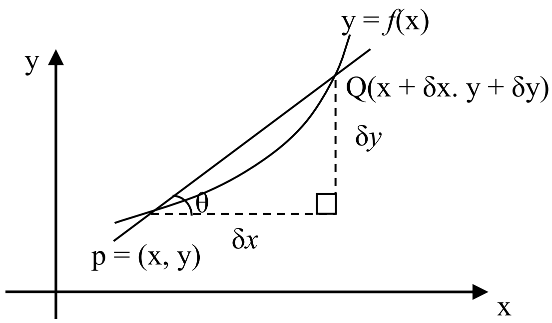
(i) $\sin a\frac{dy}{dx} - \sin^2(a+y) = 0$ எனவும்

(ii) $x^2\sin a\frac{d^2y}{dx^2} + (2x\sin a - \sin 2y)\frac{dy}{dx} = 0$ எனவும் காட்டுக. இங்கு a ஓர் மாறிலி.

அலகு -3

வகையீட்டின் பிரயோகம். Application of Derivatives

படித்திறன். (Gradient)



$y = f(x)$ எனும் வளையியில் $p(x,y)$ என்க.

P இற்கு அண்மையில் வளையியல் புள்ளி Q எனவும் கொள்க.

$\therefore Q \equiv (x+ \delta x, y+\delta y)$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \tan\theta$$

புள்ளி Q ஆனது வளையினூடாக நகர்ந்து P ஐ அணுகும் போது PQ ஆனது வளையியிற்கு P இல் தொடலியாக அமையும்.

$\therefore$ P இல் தொடலியின் படித்திறன் $= \delta x \to 0 \to \dfrac{\delta y}{\delta x}$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \frac{dy}{dx}$$

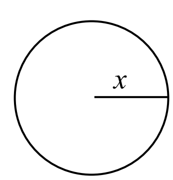
Note:- $\dfrac{dy}{dx} =$ படித்திறன், y ஆனது x உடன் மாறும் வீதம்

Eg :

(1) வட்டதட்டு ஒன்றின் ஆரை செக்கனுக்கு 5cm என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது எனின், தட்டின் ஆரை 7cm ஆகும் போது பரப்பு அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

பரப்பு $A = \pi x^2$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt}$$



$\dfrac{dx}{dt} = 5$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi x \times 5$$

$$\frac{dA}{dt} = 10\pi x$$

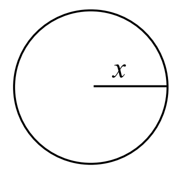
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=7} = 10 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$= 220 \text{cm}^2/\text{s}$

(2) கோளமொன்றின் ஆரை மாறாவீத்தில் அதிகரிப்பின், அதன் கனவளவு அதிகரிக்கும் வீதம் அதன் ஆரையின்வர்க்கத்திற்கு நேர்மாறாகும் எனக் காட்டுக.

$\frac{dA}{dt} = k$ (மாறிலி)

கனவளவு $V = \frac{4}{3}\pi x^3$



$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

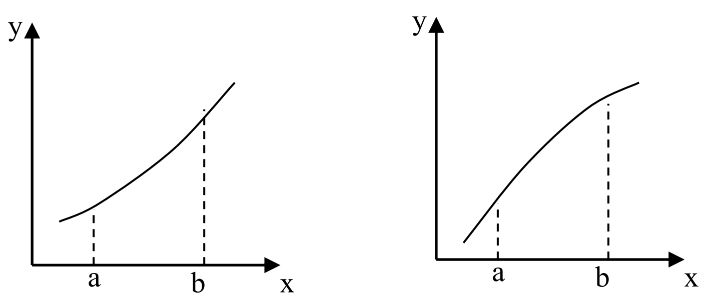
$$= 4\pi x^2 \times k$$

$$\frac{dV}{dt} = (4\pi k)x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} \ \alpha \ x^2$$

அதிகரிக்கும் சார்பு, குறையும் சார்பு.

$y = f(x)$ ஒரு சார்பு என்க. $a, b \in R$ $(a<b)$ ஆயிருக்கும் போது.

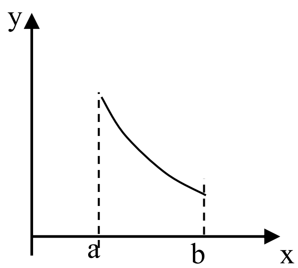


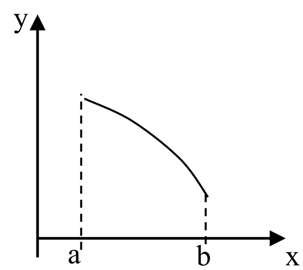
$x \,\varepsilon[a,b]$ இல் x அதிகரிக்க y அதிகரிப்பின்

$x \,\varepsilon[a,b]$ இல் அதிகரிக்கும் சார்பு எனப்படும்.

$\frac{dy}{dx}$ இல் நிபந்தனை

$\frac{dy}{dx} > 0, \forall x \varepsilon [a,b]$ எனின் [a,b] இல் அதிகரிக்கும் சார்பு எனப்படும்.





a,b εR (a<b)

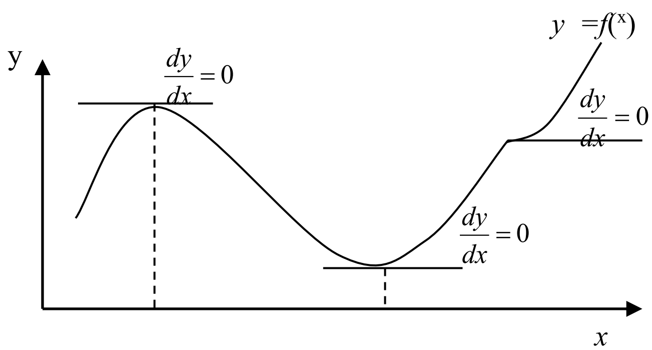
xε[a,b] இல் x அதிகரிக்க y குறையின் [a,b] இல் y குறையும் சார்பு எனப்படும்.

❖ $\frac{dy}{dx} < 0, \forall x \varepsilon [a,b]$ எனின் [a,b] இல் y குறையும் சார்பு எனப்படும்.

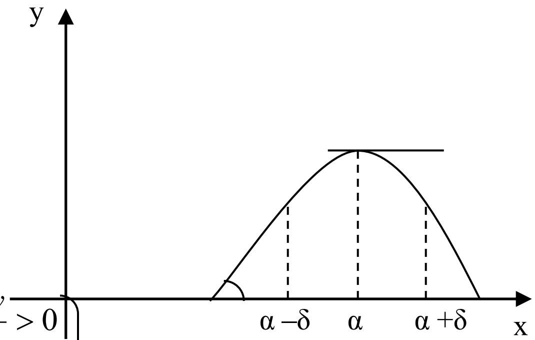
Note : xε [a,b] இல் f(x) அதிகரிக்கும் எனின் [a,b] இல் f(x) >0 என்பது தவறாகும். ஆனால் f(a) > 0 எனின் [a,b] இல் f(x) > 0 ஆகும்.

திரும்பல் புள்ளி

உயர்வு, இழிவு, விபத்திப்புள்ளிகள் திரும்பல் புள்ளிகள் ஆகும். திரும்பல் புள்ளிகளில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும்.

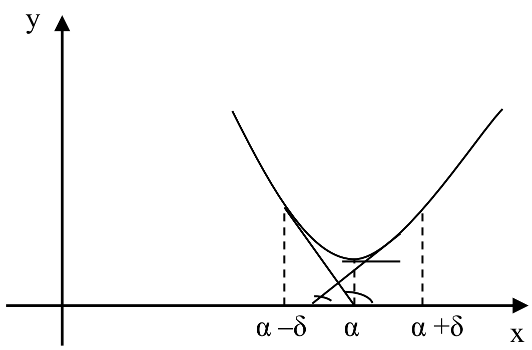


1. y = f(x) இற்கு x= α ல் உயர்வுப் புள்ளி இருப்பதற்கு



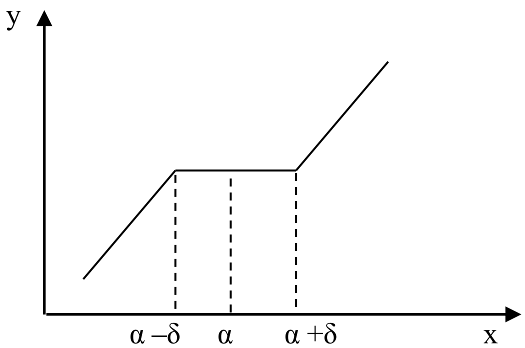
$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha-\delta \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}>0 \\ x=\alpha \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=0 \\ x=\alpha+\delta \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}<0 \end{array}\right\}$$

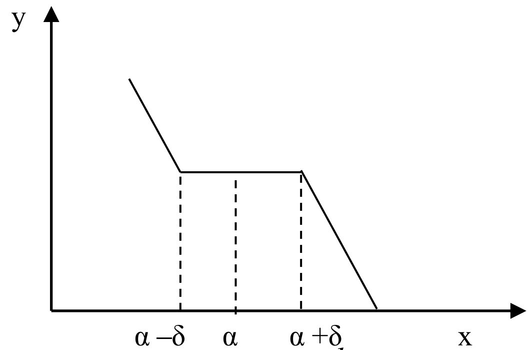
2. y= f(x) இற்கு x=α இல் இழிவு இருப்பதற்கு நிபந்தனை



$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha-\delta \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}<0 \\ x=\alpha \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=0 \\ x=\alpha+\delta \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}>0 \end{array}\right\}$$

3. y =f(x) இற்கு x= α இல் விலத்தி இருப்பதற்கு நிபந்தனை





$$\left.\begin{aligned} x = \alpha - \delta &\Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \\ x = \alpha &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \\ x = \alpha + \delta &\Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x = \alpha - \delta &\Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0 \\ x = \alpha &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \\ x = \alpha + \delta &\Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \end{aligned}\right\}$$

Eg (1) $y = x^2(x-1)^3$ என்ற வளையின் திரும்பல் புள்ளிகளைக் கண்டு அதன் வரைபை பரும்படியாக வரைக.

$y = x^2(x-1)^3$ …………….(1)

1. $$\frac{dy}{dx} = x^2.3(x-1)^2 1 + (x-1)^3.2x$$

$$= x(x-1)^2[3x+2(x-1)]$$

$$= x(x-1)^2(5x-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x(x-1)^2 1 + (x - \tfrac{2}{5})$$

திரும்பல் புள்ளிகளில் $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0, 1, \tfrac{2}{5}$

x=0 எனின்.

$$\left.\begin{aligned} x = 0 - \delta &\Rightarrow \frac{dy}{dx}(-)(+)(-) > 0 \\ x = 0 + \delta &\Rightarrow \frac{dy}{dx}(+)(+)(-) < 0 \end{aligned}\right\}$$

x =0 இல் y உயர்வு
(1) ⇨ y = 0
∴ உயர்வு புள்ளி (0,0)

சமன்பாடு 1 இல் x = 0 ஐப்பிரதியிடுவதால் y பெறப்படும்.

x=1 எனின்

$$x = 1-\delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (+)(+)(+) > 0$$
$$x = 1+\delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (+)(+)(-) > 0$$

x = 1 இல் y விலத்தி
(1) ⇨ y = 0
∴ விபத்தி புள்ளி (1,0)

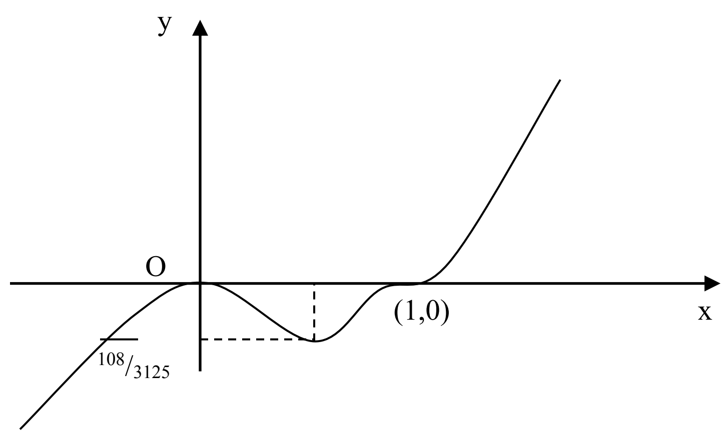
x= 2/5 எனின்

$$x = \frac{2}{5}-\delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (+)(+)(-) < 0$$
$$x = \frac{2}{5}+\delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (+)(+)(+) > 0$$

x = $^2/_5$ இல் y இழிவு
$(1) \Rightarrow y = \frac{4}{25} \times \frac{(-27)}{125} = -\frac{108}{3125}$
∴ இழிவுப் புள்ளி $\left(\frac{2}{5}, \frac{108}{3125}\right)$

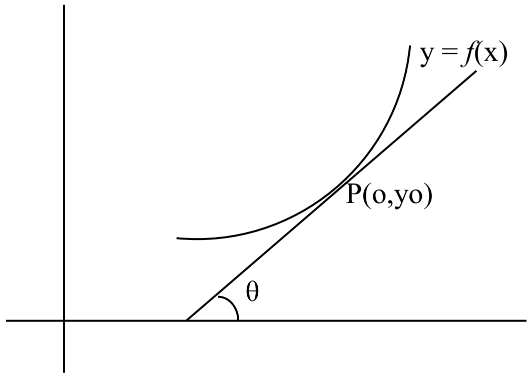
2. $y = x^2(x-1)^3$
$x \to \pm\infty \to \pm\infty$

3. $x = 0 \to y = 0 \to (0,0)$
$y = 0 \to x = 0, 1 \to (1,0)$



தொடலி, செவ்வன்

(1)



$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(xo,yo)} = P(xo,yo)$$ இல் தொடலியின் படித்திறன்

இன் தொடலியின் படித்திறன்

Eg :- $x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1} x - 9$ எனும் வளையியின் (0,3) இல் தொடலியினதும், செவ்வனினதும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1} x - 9$

x குறித்து வகையிட

$$2x + 2\left(x\frac{dy}{dx} + y.1\right) - 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - 0$$

$$2(x-y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - 2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+x^2} - 2(x+y)}{2(x-y)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,3)} = \frac{1-2(0+3)}{2(-3)} = \frac{-5}{-6} = 5/6$$

தொடலியின் சமன்பாடு

$$\frac{y-3}{x-0} = 5/6$$

$6y - 18 = 5x$

$5x - 6y + 18 = 0$

செவ்வனின் சமன்பாடு

$6x + 5y + \lambda = 0$

$(0,3) \rightarrow 0+ 15+ \lambda =0 \rightarrow \lambda =-15$

/ $6x + 5y - 15 = 0$

Or

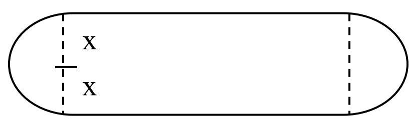
செவ்வனின் படி $= -^{6}/_{5}$

$\therefore$ செவ்வன் சமன்பாடு $\frac{y-3}{x-0} = -6/5$

$5y - 15 = -6x$

$\rightarrow 6x + 5y - 15=0$

(2) ஒரு பாடசாலை விளையாட்டு மைதானம், அதனுடைய சுற்றளவின் வழியே 440m நீளமான ஓட்டப்பாதையை உடையதாக அமைக்கப்படவுள்ளது. அவ்விளையாட்டு மைதானம் அதனுடைய குறுகிய இரு பக்கங்களிலும் இரு அரைவட்டங்களோடு கூடிய ஒரு செவ்வக வடிவுடையதாக அமைக்கப்படவுள்ளது. செவ்வக வடிவப்பகுதியின் அதிகூடிய சாத்தியமான பரப்பளவு $7700m^2$ எனக் காட்டுக.



சுற்றளவு $2y + 2\pi x =440$

$y = 220 - \pi x$ ……………..(1)

செவ்வகப்பரப்பு $A = 2xy$

$A = 2x (220 - \pi x)$ ……………(2)

$$\frac{dA}{dm} = 2(220 - 2\pi x)$$

$$\frac{dA}{dx} = -4\pi\left(x - \frac{110}{\pi}\right)$$

திரும்பல் புள்ளிகளில் $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{110}{\pi}$

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{110}{\pi}\delta \Rightarrow \frac{dA}{dx} = (-)(-) > 0 \\ x = \frac{110}{\pi} + \delta \Rightarrow \frac{dA}{dx} = (-)(+) < 0 \end{aligned} \right\}$$

$\therefore \quad x = \frac{110}{\pi}$ இல் A உயர்வு

$$(1) \Rightarrow A_{max} = 2 \times \frac{110}{\pi}(220 - 110)$$

$$= 2 \times 110 \times 110 \times \frac{7}{22}$$

$$= 2 \times 10 \times 55 \times 7$$

= 2x10 x 55 x7

A_{max} = 2x3850

= $7700m^2$

மேலும் உதாரணங்கள்

(1) $x^y + y^x = 2$ எனும் வளையி மீது (1,1) இல் வரையப்படும் தொடலி அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

$x^y + y^x = 2$

x குறித்தவகையிட

$$\frac{dx^y}{dx} + \frac{dy^x}{dx} = 0$$

$$x^y\left(\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}\right) + y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y\right) = 0$$

$$1(1+0) + 1\left(1\frac{dy}{dx} + 0\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$\therefore$ தொடலி $\frac{y-1}{x-1} = 1$

y = x

$\therefore$ அச்சை வெட்டும் புள்ளி (0,0)

குறிப்பு $\frac{dx^y}{dx^y}, \frac{dy^x}{dx}$ என்பன பெறப்படும் வழிமுறை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$z_1 = y^x$ என்க

$\ln z_1 = \ln y^x$

$\ln z_1 = x\ln y$

x குறத்து வகையிட

$$\frac{1}{z_1}\frac{dz_1}{dx} = x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y$$

$$\frac{dy^x}{dx} = y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y\right)$$

$z_2 = x^y$ என்க

$\ln z_2 = \ln y^y$

$\ln z_2 = y\ln x$

x குறித்து வகையிட

$$\frac{1}{z_2}\frac{dz_2}{dx} = y\frac{1}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz_2}{dx} = z_2\left(\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy^y}{dx} = x^y\left(\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}\right)$$

(2) புள்ளி $P(4m^2, 8m^3)$ இல் வளையி $x^3 - y^2 = 0$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலியானது வளையியை மீண்டும் Q இல் சந்திக்கிறது. Q இன் ஆள்கூறுகளை m சார்பில் காண்க. $9m^2 = 2$ எனின் PQ ஆனது Q இல் வரையும் செவ்வனாகும் எனவும் காட்டுக.

$x^3 - y^2 = 0$

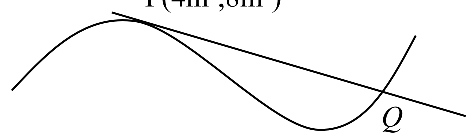
x குறித்து வகையிட

$$3x^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{2y}$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(4m^2, 8m^3)} = \dfrac{3 \times 16m^4}{2 \times 8m^3}$

$= 3m$



$Q \equiv (4M^2, 8M^3)$ என்க.

$M_{PQ} = \dfrac{8M^3 - 8m^3}{4M^2 - 4m^2} = 3m$

$= \dfrac{8\left(M^3 - m^3\right)}{4\left(M^2 - m^2\right)} = 3m$

$= 2\dfrac{\left(M - m\right)(M^2 + mm + m^2)}{\left(M - m\right)\left(M + m\right)} = 3m, \because m \neq m$

$2M^2 + 2Mm + 2m^2 = 3Mm + 3m^2$

$2M^2 + -mM - m^2 = 0$

$(2M + m)(M - m) = 0$

$M = -^{m}/2$, $M = m$

பொருந்தாது ($\therefore M \neq m$)

$\therefore M = -m/2$

$\therefore Q \equiv \left(4\dfrac{m^2}{4}, -\dfrac{8m^3}{8}\right) \Rightarrow Q \equiv (m^2, -m^3)$

$9m^2 = 2$ எனின்

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{2y}$

$Q(m^2, -m^3)$ இல் தொடலியின் படி. $\dfrac{dy}{dx} \Big|_{(m^2, -m^3)} = \dfrac{3m^4}{-2m^3} = -\dfrac{3}{2}m$

$\therefore$ Q இல் செவ்வனின் படித்திறன் $= 2/3m$

But PQ இன் படி $= 3m$

$= \dfrac{1}{3m}.(9m)^2$

$= \dfrac{1}{3m}.2$

$$= \frac{2}{3m}$$

$(\therefore 9m^2 = 2)$

$\therefore$Q இல் செவ்வனின் படித்திறன் = PQ இன் படித்திறன்

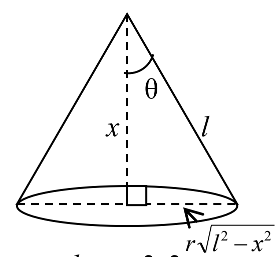
$\therefore$ PQ ஆனது Q இல் செவ்வனாகும்.

(3) ஒரு செவ்வட்ட கூம்பானது சாய்வுயரம் தரப்படுமிடத்து அதன் கனவளவானது அரையுச்சிக்கோணம் $\tan^{-1}\sqrt{2}$ ஆக இருக்கும் போது உயர்வாக இருக்கும் எனக்காட்டுக.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi(l^2 - x^2)x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 x - x^3\right)$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - 3x^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(-3)\left(x^2 - \frac{l^2}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\pi\left[x^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{x}3}\right)^2\right]$$

திரும்பல் புள்ளிகளில் $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\pi\left[x^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x = {}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}} - \delta \Rightarrow \frac{dy}{dx}(-)(-) > 0 \\ x = {}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}} + \delta \Rightarrow \frac{dy}{dx}(-)(+) < 0 \end{array}\right\}$$

$\therefore x = {}^{l}\!/\!_{\sqrt{3}}$ இல் V உயர்வு

$\therefore$ V உயர்விற்கு $x = l/\sqrt{3}$

ஆரை $\sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - l^2/3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} l$

$\tan\theta = \frac{\gamma}{x}$

$\tan\theta = \sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$

(4) $x + \frac{1}{x}$ இழிவாகுமாறு நேர் எண் x ஐ காண்க. $y = x + \frac{1}{x}$ என்க.

Mrthod I

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}(x^2 - 1)$

திரும்பல் புள்ளிகளில் $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 1, \therefore x > 0$

$$\left.\begin{aligned} x = 1 - \delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0 \\ x = 1 + \delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{x=1 இன் y இழிவு}$$

x=1 இல் y இழிவு

$\therefore$ y இழிவிற்கு x=1

Mathod II

$y = x + \frac{1}{x}$

$y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2$

$y_{\min} = 0 + 2, \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$= 2 \qquad\qquad x=1$

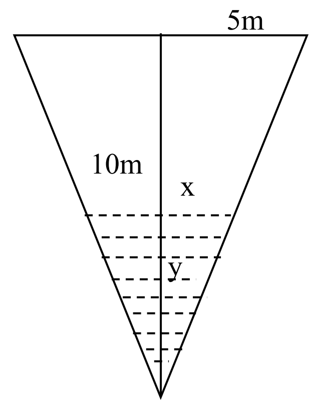
$\therefore$ y இழிவிற்கு x=1 ஆகும்.

(5) ஒரு பொள் செவ்வட்டக்கூம்பு அடிவட்ட ஆரை 5m குத்துயரம் 10m ஆகிய பரிமாணங்களைக் கொண்டதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் உச்சி கீழாகவும் இருக்க நிலைப்படுத்தப்பட்டு அதனுள் $4m^3s$ என்னும் வீதத்தில் திரவம் தொடர்ச்சியாக விடப்படின் 6m உயரத்தைக் கொண்டுள்ள கணத்தில் திரவத்தில் இறந்த நிலையில் மிதக்கும் பூச்சி ஒன்றின் நிலைக்குத்து வேகம் $\frac{4}{9\pi} m/s$ எனக்காட்டுக.

இயல் பொப்பின்படி

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{10} \Rightarrow 2x = y$$

நீரின் கனவளவு $V = \frac{1}{3}\pi x^2 \wedge y$



$$V = \frac{1}{3}\pi \times \frac{y^2}{4} y$$

$$V = \frac{\pi}{12} y^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12} \times 3y^2 \frac{dy}{dt}$$

$$4 = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt} \qquad \left(\therefore = \frac{dv}{dt} = 4\right)$$

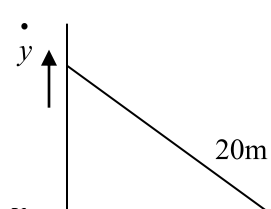
$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{16}{\pi y^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right| y = 6$$ ல்

$$\frac{16}{\pi \times 36} = \frac{4}{9\pi} m/s = \dot{y}$$

(6) நீளம் 20m உடைய ஒரு ஏணியின் ஒரு முனை கிடைத்தரையையும் மற்றைய முனை ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரையும் தொட்டவண்ணம் உள்ளது. சுவரில் இருந்து கீழ் முனை ஆனது தரையில் 16m தூரத்தில் V வேகத்துடன் தரைவழியே வழுக்கும் போது மேல்முனையானது 4/3V வேகத்துடன் நிலைக்குத்து சுவரில் வழுக்கும் எனக் காட்டுக.

$x^2 + y^2 = 20^2$



$x = 16 \rightarrow y^2 = 20^2 - 16^2$

$= 400 - 256$

$= 144$

$y = 12$

t குறித்து வகையிட .

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$$

$$\dot{y} = -\frac{x}{y}\dot{x}$$

$x = 16,\ y = 12,\ \dot{x} = V$

$$\dot{y} = -\frac{16}{12} \times V$$

$$\dot{y} = -\frac{4}{3}V \uparrow$$

$$= \frac{4}{3}V \downarrow$$

(7) $Y = \dfrac{ax - b}{(x-1)(x-4)}$ என்ற வரைபு P(2,-1) இல் திரும்பல் புள்ளியை உடையது.

i. $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

ii. a,b ஐக்காண்க.

iii. P இல் உயர்வா இழிவா எனக்காண்க. வேறு திரும்பல்புள்ளி இருப்பின் காண்க.

iv. y இன் பரும்படி வரைபை வரைக.

திரும்பல் புள்ளிகள் $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)(x-4)a-(ax+b)(2x-5)}{(x-1)(x-4)}$$

/ (x-1)(x-4)a – (2x -5) (ax+b) = 0

a(1) (-2) – (-1) (2a +b) =0

-2a + 2a + b =0

$\Longrightarrow$ b=0

P(2,1) ஐ $Y=\frac{ax-b}{(x-1)(x-4)}$ இல் இட

$$\therefore Y=\frac{x}{(x-1)(x-4)}.\frac{dy}{dx}=0$$

$\rightarrow$ x = 2,-2

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(x+2)(x-2)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

$\Longrightarrow$ x = 2,-2

$x=2-\delta\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(-)(+)(-)}{(+)}>0$

$x=2+\delta\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(-)(+)(+)}{(+)}>0$

$\rightarrow$ x= 2 இல் y உயர்வு (2,1)

$x=-2-\delta\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(-)(-)(-)}{(+)}<0$

$x=-2+\delta\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(-)(+)(-)}{(+)}>0$

$\rightarrow$ x= -2 இல் y இழிவு $D'\Rightarrow\frac{-2}{(-3)\times(-6)}=-\frac{1}{9}$ $(-2,\frac{1}{9})$

$$y=\frac{x}{(x-1)(x-4)}$$

x =1, 4 இல் சார்பு வரையறுக்கப்படமாட்டாது

$\therefore$ x=1,x=4 அணுகுகோடுகள்

$$x=1-\delta\Rightarrow y=\frac{(+)}{(+)(-)}\rightarrow\infty$$

$$x=1+\delta\Rightarrow y=\frac{(+)}{(+)(-)}\rightarrow-\infty$$

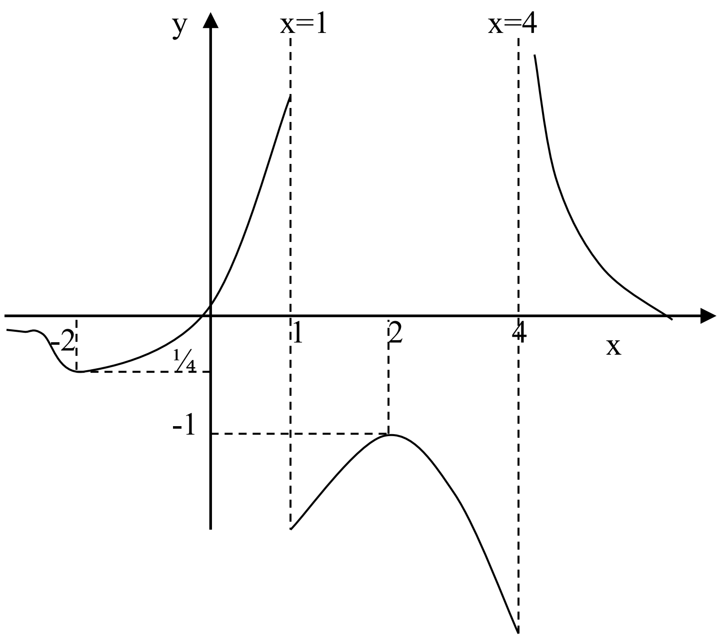
$$x = 4 - \delta \Rightarrow y = \frac{(+)}{(+)(-)} \to -\infty$$

$$x = 4 + \delta \Rightarrow y = \frac{(+)}{(+)(+)} \to \infty$$

$$y = \frac{x}{(x-1)(x-4)} = \frac{1/x}{(1-1/x)(1-4/x)}$$

$x \to \pm\infty \to y \to 0$

$x = 0 \to y = 0 \to (0,0)$



பயிற்சிகள்

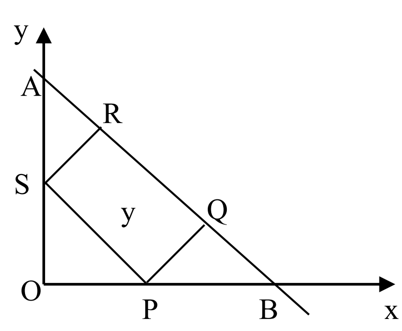
1) 2x,2y பக்க நீளங்களை உடைய செவ்வகவடிவ புற்றரையில் x ஆரையுடைய அரை வட்ட வடிவ தரை 2x விளிம்பில் வெளிப்புறமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன்

a. சுற்றளவு

b. பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

சுற்றளவு 100m ஆகுமாறு இதன் பரப்பு A ஆனது ஆல் தரப்படும் $A = 100x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$ ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து A இன் உயர்வுப்பெறுமானத்தைக் காண்க.

2) Oxy தளத்தில் AB = h, PQRS ஒரு சதுரம்;. PQ = y, ∆OAB =θ ஆகும் h மாறாமல் இருக்க θ



மாறுவதால் A,B என்பன முறையே y,x அச்சில் அசைகின்றன.

a. $y + y\cot\theta + y\tan\theta = h$ எனக் காட்டுக.

b. θ மாற y இன் அதியுயர் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3) a நீளமுள்ள கம்பித்துண்டானது இரு பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொன்றும் முறையே சதுரமாகவும் வட்டமாகவும் வளைக்கப்படுகிறது. இவற்றின் பரப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையின் இழிவுப் பெறுமானம் $\dfrac{a^2}{4(\pi+4)}$ எனக் காட்டுக.

4) தனது அடியின் ஆரை a உம் உயரம் h ஆகவும் உள்ள நேர்வட்ட கூம்பினுள் உள்ளுரவமாக வரையத்தக்க நேர்உருளைகளுள் மிகப்பெரிய கனவளவு உடையதன் உயரம் $\dfrac{1}{3}h$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

5) a ஆரையுடைய கோளத்தினுள் உள்ளுரவமாக வரையத்தக்க நேர் உருளைகளுள் உயர்வளைபரப்பு கொண்டதன் உயரம் $a\sqrt{2}$ எனக்காட்டுக.

6) ஒரே ஆரையுடைய பொள் அரைக்கோளம் ஒன்றும் திறந்த பொள் உருளை ஒன்றும் ஒன்றாக பொருத்தப்படுவதால் $18\pi cm^3$ கொள்ளளவுடைய திறந்த பாத்திரம் ஒன்று ஆக்கப்படவுள்ளது. குறைந்தளவு திரவியத்தை கொண்டு அப்பாத்திரம் ஆக்கப்படுவதற்கு அதன் பரிமாணங்களை காண்க.

7) தந்த ஒரு கோளத்திற்கு சுற்றுரபமாக வரைந்த இழிவு வளைபரப்பு கொண்ட கூம்பின் அரை உச்சிக்கோணம் $Sin^{-1}\left(\sqrt{2}-1\right)$ எனக்காட்டுக.

8) இரு சமபக்க முக்கோணி ஒன்று தரப்பட்ட வட்டத்திற்குள் வரையப்பட்டுள்ளது. அம்முக்கோணி சமபக்க முக்கோணி ஆகும் போது அம்முக்கோணியின் சுற்றளவு உயர்வாகும் எனக்காட்டுக.

9) ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு $18cm^3$ உயரம் h எனின் அதன் சாய்வுயரம் $\left(h^2+\dfrac{54}{h}\right)^{1/2}$ எனக்காட்டுக. h மாறும் போது சாய்வுயரத்தின் இழிவுப்பெறுமானம் $3\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

10) xkmh^{-1} என்னும் மாறாக் கதியில் செல்லும் பாரஊர்தி ஒன்றின் எரிபொருள் பயன்பாடு km இற்கு $\frac{1}{200}\left(\frac{900}{x}+x\right)l$ ஆகும். $1l$ எரிபொருளின் விலை ரூபா 100 உம், ஊர்தியின் சாரதிக்கு 1km இற்குரிய ஊதியம் ரூபா 350 உம் எனின், ஊர்தியானது 500km தூரம் செல்வதற்குரிய மொத்த செலவினம் இழிவாயிருப்பதற்கு, அதன் மாறாக்கதியைக் காண்க.

11) N என்ற ஓர் எண் இருபகுதிகளாக பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒன்றினது வர்க்கத்தினதும் மற்றயதன் கனத்தினதும் பெருக்கம் உயர்வாக இருக்க வேண்டுமெனின் ஒவ்வோர் பகுதிகளையும் காண்க. N=150 எனின் அப்பகுதிகளை காண்க.

12) ஒரு கூம்பு தரப்பட்ட வேறொரு கூம்பினுள், அதனுடைய உச்சி தரப்பட்ட கூம்பின் அடித்தளத்தின் மையத்திலும், அதனுடைய அடித்தளத்தின் பருதி தரப்பட்ட கூம்பின் வளை பரப்பிலும் இருக்குமாறு உள்ளுருவமாக அமைந்துள்ளது. இக் கூம்பு அதிகூடிய கனவளவைக் கொள்ள வேண்மாயின் அதனது உயரம் தரப்பட்ட கூம்பினுடைய உயரத்தின் மூன்றிலொரு பங்கு ஆதல் வேண்டும் எனக் காட்டுக.

13) r ஆரை உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி P இல் வரையப்படும் தொடலிக்கு சமாந்தரமாக வரையப்படும் மாறும் நாண் QR ஆகும் எனில் ΔPQR இன் பரப்பு உயர்வாக அமைவதற்குரிய பரப்பின் சாத்தியமான பெறுமதி $\frac{3\sqrt{3r^2}}{4}$ எனக்காட்டுக.

14) வானெலி பெட்டி உற்பத்தி செய்யும் தொழிற்சாலையில் ஒரு நாளைக்கு x வானெலிப் பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்யும் செலவு $\left[\frac{1}{4}x^2+35x+25\right]$ ரூபா ஆகும். ஒரு வானொலிப்பெட்டி விற்கும் விலை $\left[50-\frac{1}{2}x\right]$ ரூபா தொழிற்சாலை இலாபத்தில் இயங்குவதற்கு ஒரு நாளைக்கு எத்தனை வானொலிப் பெட்டிகளை உற்பத்தி செய்ய வேண்டும்.

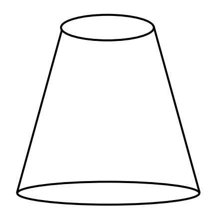
15) $y=2\pi x^2+\frac{1000}{x}$ எனத்தரப்படுகிறது $a)\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க. $b)\frac{dy}{dx}=0$ ஆகும் போது $x^3=\frac{250}{\pi}=0$ எனக்காட்டுக. ஒரு மூடிய உருளையானது 500cm^3 கொள்ளளவு உடையது.

இதன் ஆரை rcm ஆகவும், மொத்த மேற்பரப்பு Acm^2 ஆகவும் இருப்பின் $A = 2\pi x^2 + \frac{1000}{r}$ எனக்காட்டி, அதன் மிகக்குறைந்த மொத்த மேற்பரப்பளவை உய்த்தறிக.

16) ஒரு கூம்பு தரப்பட்ட வேறொரு கூம்பினுள், அதனுடைய உச்சி தரப்பட்ட கூம்பின் அடித்தளத்தின் மையத்திலும், அதனுடைய அடித்தளத்தின் பருதி தரப்பட்ட கூம்பின் வளை பரப்பிலும் இருக்குமாறு உள்ளுருவமாக அமைந்துள்ளது. இக்கூம்பு அதிகூடிய கனவளவைக் கொள்ள வேண்டுமாயின் அதனது உயரம் தரப்பட்ட கூம்பினுடைய உயரத்தின் மூன்றிலொரு பங்கு ஆதல் வேண்டும் எனக் காட்டுக.

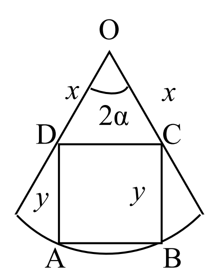
17) a நீளமுள்ள கம்பித்துண்டானது இரு பகுதிகளாக பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொன்றும் முறையே சதுராமாகவும் வட்டமாகவும் வளைக்கப்படுகின்றது இவற்றின் பரப்புகயின் கூட்டுதொகையிக் இழிவுப்பெறுமானம் என காட்டுக

18) வட்டக் குறுக்கு வெட்டில் உள்ள நேரான அடி மரம் ஒன்று 5m நீளம் உள்ளதாகும் இந்த அடி மரம் சீராகக் கூம்பிச் செல்கிறது அடி மரத்தின் ஒரு முனையின் ஆரை 1.5m உம் மற்ற முனையின் ஆரை 0.5m உம் ஆகும் இந்த அடி மரத்தில் இருந்து வெடடி எமுக்கதக்க மிகக் கூடிய கனவளவு உடைய உருளைக் கம்மொன்றின் நீளம் 2.5m எனக் காட்டுக



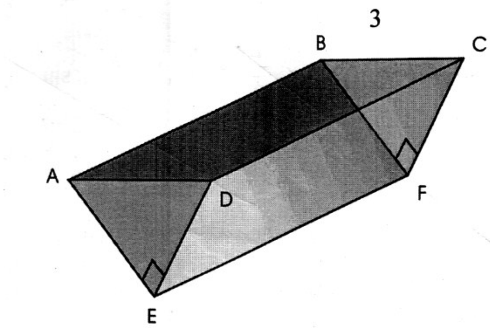
19) செம்மிறட் வடிவிளான குற்றி ஒன்றின் அடி x பக்க நீளமுள்ள சதுரம்மாகும் அதன் உயரம் y உம் ஆகும் இதன் மொத்த மேற்பரப்பளவு a^2 ஆகும் a இங்கு ஓர் மாறுலி x,y,a இற்கிடையிலான தொடர்பை பெறுக. பிரமிட்டின் கனவளவு V எனின் $36V^2= a^2 x^2(a^2-2x^2)$ எனக்காட்டு x உம் y ம் மாறிகள் எனத்தரப்படின் பிரமிட்டின் உயர் கனவளவை a இன் சார்பில் காண்க.

20) ஆரை α யும் மையத்தில் 2α யும் உடைய ஆரைச்சிறையில் ABCD எனும் செவ்வகம் சமச்சீராக அமைந்துள்ளது. OC = OD =x உம் AD =BC = y உம் ஆயின் $a^2=x^2+2xy\cos\alpha + y^2$ எனக் காட்டுக. $\frac{dy}{dx}$ ஐ x,y,α சார்பில் கணித்து செவ்வகம் ABCD இனது பரப்பளவின் உயர்வுப் பெறுமானம் $a^2 \tan\frac{\alpha}{2}$ எனக் காட்டுக.



21) 80km இடைத்தூரத்தில் உள்ள இரு நகரங்களுக்கிடையில் ஓர் புகையிரதம் ஈடுபடுகின்றது. இப்புகையிரதத்திற்கு மணித்தியாலம் ஒன்றிற்கான எரிபொருள் நுகர்வு வீதம் அதன் வேகத்தின் வர்க்கத்திற்கு நேர்விகித சமனாக மாறுகின்றது. புகையிரத வேகம் $16kmh^{-1}$ ஆகவுள்ள போது எரிபொருள் செலவு மணித்தியாத்திற்கு 480 ரூபா ஆகவுள்ளது. புகையிரத பயணத்திற்குரிய இதர செலவுகள் மணித்தியாலம் ஒன்றிற்கு 3000 ரூபா (நிலையானது) ஆயின் இப்பயண மொத்த செலவை இழிவாக்க புகையிரதத்தின் உயர்கதியை கண்டு இதிலிருந்து பிரயாணத்திற்குரிய மொத்த இழிவுசெலவை காண்க.

22)

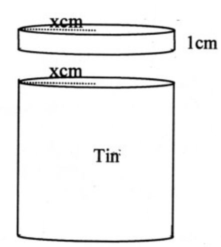


உருவில் காணப்படுவது திறந்த தண்ணீர்சேகரிக்கும் தொட்டியாகும். பக்கங்களான ABFE,CDEF என்பன செவ்வகங்கள் மற்றய இரு பக்கங்களான ADF, BCF என்பன இருசமபக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணங்களையும் $\lfloor AED = \lfloor BFC = 90^0$ ஆயும் உள்ளன. ADE, BCF அகியன நிலைக்குத்தாகவும் EF கிடையாகவும் உள்ளன. AD = x எனவும் தரப்படுகிறது. தாங்கியின் கொள்ளளவு $4000m^3$ ஆகவும், மொத்த பரப்பளவு(வெளி) sm^2 ஆகவும் இருப்பின்,

a) $s = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{16000\sqrt{2}}{x}$ எனக் காட்டுக.

b) முதலாம் பெறுமதியை மட்டும் பயன்படுத்தி s இன் அதிகுறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

23) உருளை வடிவமான biscust ஒன்று 1cm இறுக்கமான மூடி கொண்ட ஒரு உருவமாகும். மூடியினதும் உருளை வடிவமான Tin இனது ஆரை xcm ஆகும். மூடியும் Tin உம் $80\pi cm^2$ பரப்பளவுடைய ஒரு மெல்லிய தகட்டில் இருந்து ஆக்கப்படுகிறது. தகட்டில் இருந்து உருளை ஆக்கப்படும் போது எதுவித இழப்பும் ஏற்படவில்லை எனக் கொண்டு ஆக்கப்படும் உருளை வடிவமான Tin இன் கனவளவு v ஆனது.



a) $V = \pi(40x - x^2 - x^3$ எனக்காட்டுக.

b) v அதியுயர் பெறுமானம் எடுப்பதற்கான x இன் பெறுமானம் யாது?

c) அதியுயர் v இனைக் காண்க.

24) $x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$ என்பதால் தரப்படும் வளையியின் வரைபு கீழே தரப்பட்டுள்ளது. θ இனுடைய எல்லப் பெறுமானங்களிற்கும் $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ என்பது இவ்வளையியில் உள்ள புள்ளியாகும் எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து கீழே காட்டப்பட்டவாறு வரையப்படும் செவ்வகங்களும் மிகப்பெரிய பரப்பைக் கொண்டது சதுரம் ஆகும் போது நிகழும்

எனக்காட்டி, அதன் பரப்பு $\left(\frac{a^2}{2}\right)$ சதுர அலகுகள் எனவும் காட்டுக. முதலாம் பெறுதியை மட்டும் பாவித்து)

25) $x^2+2xy+y^2 - 4x+2y-2=0$ எனும் வளையி (1,1) எனும் புள்ளிக்கூடாக செல்லும் எனக்காட்டி வளையீக்கு அப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

26) $y=\frac{1}{(5-3x)^2}$ என்ற வளையீக்கு (1,1/4) என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை காண்க.

27) $x=\frac{3t}{1+t^3}, y=\frac{3t^2}{1+t^3}$ எனும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் தரப்படும் வளையி மீது (2/5,4/3) எனும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலியினதும் செவ்வனினதும் சமன்பாடுகளை காண்க.

28) வளையீ C சமன்பாடு $x^3+xy+2y^3=k$ ஆகும். k மாறிலி $\frac{dy}{dx}$ ஐ x,y இல் காண்க. C ஆனது y அச்சுக்கு சமாந்தரமான தொடலிகளை கொண்டிருப்பின் தொடுபுள்ளிகளின் y ஆள்கூறு $216y^6+4y^3+k=0$ ஐ திருப்தி செய்யவேண்டுமென காட்டுக. இதிலிருந்து $k \leq 1/54$ எனக் காட்டுக. x=-6 தொடலியாக k இன் பெறுமானம் யாது? C ஆனது x அச்சுக்கு சமாந்தரமான தொடலியை கொண்டிருப்பின் $k\leq 1/54$ எனவும் காட்டுக.

29) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ஆல் வளையீ ஒன்று தரப்படுகின்றது. $\frac{dy}{dx}=\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ எனக்கட்டி $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க. இவ்வளையீ x அச்சை A,B இலும் Y அச்சை C இலும் வெட்டுகின்றது. A,B,C இன் ஆள்கூறுகளை காண்க. A,B இலான தொடலிகளின் சமன்பாட்டை கண்டு இவை ஒவ்வொன்றும் C ஊடு செல்லும் எனக்காட்டுக.

30) புள்ளி $P(at^2,at^3)$ இல் வளையி $ay^2=x^3$ இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலி வளையியை மீண்டும் Q வில் சந்திக்கிறது. இங்கு a ஒரு மாறிலி O உற்பத்தியும் N ஆனது P யிலிருந்து x – அச்சுக்கான செங்குத்தின் அடி யும் E ஆனது PQ உம் y – அச்சும் இடைவெட்டும் புள்ளியுமெனின் $m_{oQ} = -m_{NR}$ எனக்காட்டுக.

31) வளையி ஒன்று x = $a\cos^3\theta$, y = a $\sin^3\theta$ எனத் தரப்படுகிறது. $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ என்பவற்றைக் காண்க. வளையிக்கு $\theta = \frac{\pi}{4}$ இல் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

32) வளையி $y(1+x^2) = 2$ இற்குப் புள்ளி P(3,1/5) இல் உள்ள தொடலி வளையியை மறுபடியும் Q இல் சந்திக்கின்றது. Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அலகு -4

தொகையீடு (Integration)

Def^n :- $\frac{d}{dx}[\emptyset(cx)] = f(x)$எனினி $f(x)$ இனது x குறித்த தொகையீடு $\emptyset(x)$ எனப்பட்டு பின்வறுமாறு குறிக்கப்படும் $\int f\,(x)dx = \emptyset(x)$

உதாரணம்: (1) $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

தொகையீட்டு வரைவிலக்கணப்படி

$$\int 5x^4 dx = x^5$$

(2) $\frac{d}{dx}[\sin x + cos^2 x] = cosx - 2sinxcosx$

$$cosx - sin2x$$

தொகையீட்டு வரைவிலக்கணப்படி

$$\int (cosx - sin2x)dx = sinx + cos^2 x$$

தேற்றம் :- (1)$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ c-மாறிலி

(2)$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

நியமவடிவம் (1) $\int\; x^n\,dx = \frac{x^{x+1}}{x+1} + c,$ $n \neq -1$

இங்கு c தொகையீட்டு மாறிலி எனப்படும் அத்துடன் n நேர்மமுளண், மறைமுழுஎண், பின்னம்

Note:-$\int 1dx = x + c$: c- தொகையீட்டு மாறிலி

உதாரணம் :- (1) $\int x^6\,dx$

$= \frac{x^7}{7} + c$

(2) $\int \frac{x^{\,3}-4}{x^2}dx$

$= \int (x - 4x^{-2})\, dx$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{4x^{-1}}{-1} + c$

(3) $\int sec^2 x\, d(tanx)$

$= \int (1 + tan^2 x) d(tanx)$

$= tanx + \frac{tan^2 x}{3} + c$

பயிற்சி:-

(1). $\int \sqrt{x}\ dx$

(2). $\int (x-1)(x+1)dx$

(3). $\int (x + \frac{1}{x})^2\ dx$

(4). $\int Cosx\ d(Cosx)$

(5). $\int d(lnx)$

(6). $\int (\frac{x^2-1}{x-1})dx$

நியமவடிவம் (2)

$$\int ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + c\ ,$$

$$n \neq\ 1$$

இங்கு C தொகையீட்டு மாறிலி அத்துடன் n நேர் முழு எண், மறை முழு எண் பின்னம்

உதாரணம் :- (1) $\int (2x+1)^4 dx$

$= \frac{(2x+1)^5}{5 \times 2} + c$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$

$$= \int (1-2x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(-2)} + c$$

(3) $\int x(x+1)^5 \, dx$

$$= \int (x+1-1) \; (x+1)^5 dx$$

$$= \int [(x+1)^6 - (x+1)^5] dx$$

$$= \frac{(x+1)^7}{7\times1} - \frac{(x+1)^6}{6\times1} c$$

பயிற்சிகள் :-

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(1). $\int (5x-1)^6 \, dx$

(2). $\int x\sqrt{1-x} \; dx$

(3). $\int 5y(2y-1)^{12} dy$

நியமவடிவம் (3) $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$

இங்கு C- தொகையீட்டு மாறிலி

நியமவடிவம் (4) $\int \frac{1}{ax+6} dx = \frac{ln|ax+6|}{a} + c$

இங்கு C- தொகையீட்டு மாறிலி

உதாரணம் :- (1) $\int \frac{1}{2-x} \; dx$

$$= \frac{ln|2-x1}{-1} + c$$

(2) $\int \frac{x+3}{x^2} \; dx$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} dx$$

$= ln|x| + \frac{3x^{-1}}{-1} + c$

$= ln|x| - \frac{3}{x} + c$

பயிற்சிகள் :-பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக

(1) $\int \frac{1}{7x-1} dx$

(2) $\int \frac{x+5}{x+6} dx$

(3) $\int \frac{x^2-3}{x-4} dx$

(4) $\int \frac{x}{1-4x} dx$

நியமவடிவம் :- (5) $\int \frac{\emptyset(x)}{\emptyset(x)} dx = ln|\emptyset(x)|+c$

இங்கு C- தொகையீட்டு மாறிலி

உதாரணம் :- (1) $\int \frac{5x}{1+x^2} dx$

$= \frac{5}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= \frac{5}{2} \ln(1 + x^2) + c$

(2) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$= \ln(1 + e^x) + c$

(3) $\int \frac{sin2x}{4+cos^2x} dx$

$= (-) \int \frac{-2sinxCosx}{4+Cos^2x} dx$

$= (-)\ln(4 + cos^2x) + c$

பயிற்சிகள் :-

பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

1. $\int \frac{7x}{2+x^2}dx$

2. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

3. $\int \left\{\frac{\sin x + x\cos x}{x\sin x}\right\}dx$

நியமவடிவம் $\int [\phi^n(x)]^n \phi^1(x)dx$

$\frac{[\phi(x)]^{n+1}}{n+1}+c$ இங்கு n≠ -1

C- தொகையீட்டு மாறிலி

உதாரணம் :- (1) $\int (7x+5)^9.7dx$

$= \frac{(7x+5)^{30}}{10}+C$

(2) $\int (e^x+1)^7 e^x dx$

$= \frac{(e^x+1)^8}{8}+C$

(3) $\int e^{2x}(1+e^{2x})^3 dx$

$= \frac{1}{2}\frac{(1+e^{ex})^4}{4}+C$

$= \frac{1}{8}(1+e^{2x})^4 + C$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

1. $\int x^3\sqrt{1-x^4}dx$

2. $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$

3. $\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2 + 1)^4} dx$

நியமவடிவம் (7)

(a) $\int e^x dx = e^x + c$

(b) $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$

இங்கு C –தொகையீட்டு மாறிலி

உதாரணம் (1) :- $\int e^{5x} dx$

$= \frac{e^{5x}}{5} + c$

(2) $\int e^a dx$

$= e^a x + c$

(3) $\int \frac{(e^x + 1)}{e^x} dx$

$\int (1 + e^{-x}) dx$

$= x + \frac{e^{-x}}{-1} + c$

(4) $\int x^2 e^{x^3} dx$

$= \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x)^3$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

பயிற்சிகள் பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) $\int xe^{x^2}\,dx$

(3) $\int e^{\cos 2x}\ \sin 2x dx$

பகுதிப்பின்னம் சம்பந்தமான தொகையீடுகள்

உதாரணம் :- (1) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$\int \left[\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right]dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln|x-1|-\tfrac{1}{2}\ln|x+1|+c$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$$

(2) $\int \frac{3x+4}{(x+2)^2}dx$

$$=\frac{3x+4}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

3x + 4 = A (x+2) +B

x =-2→ B =-2

x : 3=A

$$\int \frac{3x+4}{(x+2)^2}dx=\int\left[\frac{3}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}\right]dx$$

$$=3\ln|x+2|-2\frac{(k+2)^{-1}}{-1}+C$$

பயிற்சிக் :- பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

1. $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

2. $\int \frac{4x}{(x+2)^3} dx$

நியமவடிவம் :- (8) திரிகோணகணித சார்புகளின் தொகையீடுகள்

(1) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(2) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(3) $\int \tan dx = -\ln|\cos x| + c$

(4) $\int \cot dx = -\ln|\sin x| + c$

(5) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(6) $\int \cos ecx dx = \ln|\cos ecx + \cot x| + c$

இங்கு C- தொகையீட்டு மாறிலி

Note :- $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$

உதாரணம் :-

(1) $\int \sin 3x dx$

$= -\frac{\cos 3x}{3} + c$

(2) $\int \tan 4x dx$

$= -\frac{\ln|\cos 4x|}{4} + c$

(3) $\int \cos x.\cos(\sin x) dx$

$\int \cos(\sin x) d(\sin x)$

= sin (sinx) + c

பயிற்சிகள் : பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\int \sec 3x dx$

(2) $\int \cos 11x dx$

(3) $\int x\cos(x^2)dx$

(4) $\int \sin x \cos(\cos x)dx$

நியமவடிவம் :-(9)

$\int \sin^n x)dx$ அல்லது $\int \cos^n x)dx$ என்ற வடிவிலுள்ள தொகையீடுகளிற்கு

i. n இரட்டை எனின் மடங்குக்கோணம் ஆக்கவதன் மூலமும்.

ii. n ஒற்றை எனின் பிரதியீட்டு முறை மூலமும் தொகையிடலாம்.

உதாரணம்

1. $\int \sin^2 x dx$

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$$

2. $\int \cos^5 x dx$

முறை I:- sinx = t

- cos x dx = dt

$$\int \cos^5 x dx = \int \left(1-t^2\right)^2 dt$$

$$\int (1-2t^2+t^4)dt$$

$$\int t-2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C$$

$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c$$

முறை II :- $\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx$

$$\int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$\int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

3. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

4. $\int \tan^2 x dx$

$\int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx$

$\int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx$

$\int \tan^2 x d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1)dx$

$\frac{\tan^{3x}}{3} - \tan x + x + c$

5. $\int \sec^4 x dx$

$\int (1 + \tan^2 x) d(\tan x)$

$= \tan x + \frac{\tan^{3x}}{3} + C$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

1. $\int \cos^2 x dx$
2. $\int \sin^3 x dx$
3. $\int \sin^4 x dx$
4. $\int \sec^6 x dx$
5. $\int (\sin^4 x + \cos^4 x)dx$
6. $\sqrt{\int 1 + \sin 2x)} dx$

வரையறுத்த தொகையீடுகள்

$\int f(x)dx = \phi(x) + C$ எனின்

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(x)\Big|_a^b$$

$= \phi(b) - \phi(a)$ ஆகும்

உதாரணம் :-

(1) $\int_0^1 x^3 dx$

$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1$

$= \frac{1}{4} - 0$

= ¼

(2) $\int_0^1 e^{5x} dx$

$= \left.\frac{e^{5x}}{5}\right|_0^1$

$= \frac{1}{4}\left(e^5 - 1\right)$

(3) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

$= -\cos x\Big|_0^{\pi/2}$

= -[0-1]

= 1

தோற்றம் :-

(1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

நிறுவல்:- $\int_a^b f(x)dx = \phi(x)\Big|_a^b$

$$= \phi(b) - \phi(x)$$

$$= -[\phi(a) - \phi(b)]$$

$$= [\phi(x)]_b^a$$

$$= -\int_b^a f(x)dx$$

(2) a <c < b ஆயிருக்க

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \phi(x)\Big|_a^c + Q(x)\Big|_c^b$$

$$= \phi(c) - \phi(a) + \phi(b) - \phi(c)$$

$$= \phi(b) - \phi(x)$$

$$= \phi(x)\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a-x)dy$

(4) $\int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(a-x)dx$

நிறுவல் :- x = a –y என்க

x→ 0 ஆக y→ a

x→ a ஆக y → 0

dx = -dy

$$\int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(a-y)(-dy)$$

$$\int_0^a f(a-y)dy = \int_a^0 f(a-x)dx$$

உதாரணம் :- $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \sin(\pi/2 - x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

$$= \sin x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 1$$

நியமவடிவம் (10)

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ என்ற வடிவிலுள்ள தொகையீடுகள் இங்கு m,n நேர் முழு எண்கள் அத்துடன் குறைந்தது ஒன்று ஒன்றை இதனைப் பிரதியீட்டு முறைமூலம் தொகையிடலாம்.

உதாரணம் $\int \sin x \cos^3 x dx$

$t = \cos x$ என்க

dt = -sinx dx

$$\int \sin x \cos^3 x dx = -\int t^3 dt$$

$$= -\frac{t}{4} + C$$

$$= -\frac{t}{4}\cos^4 x + C$$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\int \sin^7 x \cos^3 x dx$

(2) $\int \sin^5 x \cos^8 x dx$

நியமவடிவம் (11)

$\int \sin px \cos qx dx$ என்ற வடிவிலுள்ள தொகையீடுகள்

$$\int \sin px \cos qx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(p+q)x + \sin(p-q)x]dx$$

$$\frac{1}{2}\int \left\{ \frac{-\cos(p+q)x}{(p-q)} - \frac{\cos(p-q)x}{(p-q)} \right\} + C$$

உதாரணம் :- $\int_0^{\pi/2} 3\cos 3x \cos x dx$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 4x + \cos 2x)dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{2}[0+0]$$

$$= 0$$

பயிற்சி:- $\int_0^{\pi/2} Sin 3x \cos 7x dx$ இனைக் காண்க.

நியமவடிவம் (12)

$\int \left\{ \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + dSinx} \right\} dx$ என்ற வடிவிலுள்ள தொகையீடுகளிற்கு

acosx + b sinx = λ (ccosx + dsinx) + μ (-c sinx+dcosx) எனும் வடிவில் எழுதி λ, μ இனைத் துணிந்து தொகையிடலாம்.

உதாரணம் : $\int \left\{ \frac{2\cos x + 4\sin x}{3\cos x + Sinx} \right\} dx$

2cosx – 4sinx =λ (3cosx + sinx) + μ (-3sinx+cosx)

x=0 → 2 =3λ +μ …………….(1)

x = $\pi/2$ → -4 = λ -3μ …………….(2)

(1) θx → λ =1/5

$\mu = 7/5$

$$\int\left\{\frac{2\cos x+4\sin x}{3\cos x-\sin x}\right\}dx=\int\left[\frac{\frac{1}{5}(3\cos x+s0nx)+\frac{7}{5}(-2\sin x+\cos x)}{3\cos x+\sin x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{5}\int\left\{\frac{3\cos x+\sin x}{3\cos x-\sin x}\right\}dx+\frac{7}{5}\int\frac{-3\sin x+\cos x}{3\cos x+\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}\ln|3\cos x+\sin x|+C$$

பயிற்சி : - $\int\left\{\frac{3\cos x+2\sin x}{2\sin x-\cos x}\right\}dx$ இணைக்காண்க.

நியம வடிவம் :- (13)

(1) $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$

(2) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(x/a\right)+C$

(3) $\int\frac{1}{a^2+(bx)^2}dx=\frac{1}{a}\frac{\tan^{-1}\left(bx/a\right)}{b}+C$

(4) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C$

(5) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\left(x/a\right)+C$

(6) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-(bx)^2}}dx=\frac{\sin^{-1}\left(bx/a\right)}{b}+C$

இங்கு C- தொகையீட்டு மாறிலி

உதாரணங்கள்

(1) $\int_0^4\frac{1}{16+x^2}dx$

$$= \int_0^4 \frac{1}{4^2 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1}(x/4)\Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{4} \left[\pi/4) - 0 \right]$$

$= \pi/16$

(2) $$\int \frac{1}{\sqrt{36 - \theta^2}} d\theta$$

$=\sin^{-1}(\theta/6)+C$

(3) $$\int \frac{4e^x}{3 + e^{2x}} dx$$

$t = e^x$ என்க

$dt = e^x\, dx$

$$\int \frac{4e^x}{3 + e^{2x}} dx = 4\int \frac{1}{3 + t^2} dt$$

$$= 4 \frac{1}{\sqrt{3}} . \tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} . \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(4) $$\int \frac{Cosx}{36 + \sin^2 x} dx$$

$t = \sin x$

$dt = \cos x\, dx$

$$\int \frac{Cosx}{36 + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{6^2 + t^2} dt$$

$$= \frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{6}\right) + C$$

பயிற்சிகள் பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

(1) $\int \frac{1}{7+x^2}dx$

(2) $\int \frac{3z^4}{49+z^{10}}dz$

(3) $\int \frac{1}{49+(2x+1)^2}dx$

(4) $\int \frac{7x^7}{\sqrt{49-x^{16}}}dx$

(5) $\int \frac{3e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$

நியமவடிவம் (14)

$\int \frac{1}{ax^2+bx+C}dx$ என்ற வடிவில் அடைந்த தொகையீடுகள் ($a \neq 0$)

வகை I :- $b^2 - 4ac > 0$ என்க

b^2 -4ac > எனின் $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ எண்ற காரணிவடிவில் எழுதலாம்

α,β இங்கு மெய்யெண்கள்

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+C} = \int \frac{A}{(x+\alpha)}dx + \int \frac{\beta}{(x-\beta)}dx$$

$= A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + C$

வகை II :- $b^2 - 4ac = 0$ என்க

$ax^2 + bx + C = (Px + q)^2$ என்றவடிவில் எழுதலாம்.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+2}dx = \int \frac{dx}{(Px+q)^2}$$

$$= \frac{-1}{Px+q)} + C$$

வகை III :- $b^2 - 4ac < 0$ என்க

$ax^2 + bx + C = a[(x+\alpha)^2+\beta^2]$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+2}\,dx = \tfrac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\tan^{-1}\left[\frac{x+\alpha}{\beta}\right]+C$$

உதாரணம் :-

(1) $$\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}\,dx$$

$$\int \left\{\frac{1/3}{x-2}-\frac{1/3}{x+1}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$$

(2) $$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{x+2}+C$$

(3) $$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+3^2}\,dx$$

$$\frac{1}{3}.\tan^{-1}\left[\frac{x+1}{3}\right]+C$$

நியமவடிவம் (15)

$\int \frac{Px+q}{ax^2-6x-c}dx$ என்ற வடிவம்

$Px+q=\lambda\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+\mu$ ஆகுமாறு ஒருமைகள் λ, μ உள்ள போது

$$\int \frac{Px+q}{ax^2-bx+c}dx=\lambda\int\frac{\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}dx+\mu\int\frac{dx}{ax^2+bx+C}$$

$\lambda\ln\left|ax^2+bx+C\right|+\mu\int\frac{dx}{ax^2-bx+c}dx$ ஆகும்

உதாரணம் :- $\int \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$

$3x+5=\lambda(2x-3)+\mu$

x :- λ = 3/2

x:- 5 = -3λ +μ

μ = 19/2

$$\int \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx=\int\frac{3/2(2x-3)}{x^2-3x-4}dx+\int\frac{19/2}{x^2-3x-4}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-3x-4|+\frac{19}{2}\int\frac{1}{(x-4)(x+1)}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-3x-4|+\frac{19}{2}\int\left[\frac{1/5}{x-4}+\frac{1/5}{x+1}\right]dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-3x-4|+\frac{19}{2}\left[1/5\ln|x-4|-\frac{1}{5}\ln|x+1|\right]C$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-3x-4|+\frac{19}{10}\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right|+C$$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக

(1) $\int\frac{11x+7}{25x^2-10x+1}dx$

(2) $\int\frac{5x+1}{2x^2-4x+3}dx$

நியமவடிவம் (16)

$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+6x+c}}dx$ என்ற வடிவிலுள்ள தொகையீடுகளிற்கு a < 0 எனின் இதன் தொகையீடு $\sin^{-1}$ எனும் வடிவில் அமையும் அதனால் a > 0 எனின் இம்முறையால் தொகையிட முடியாது a > 0 எனின் பிரதியீட்டு முறையால் தொகையிடலாம்.

உதாரணம் :-

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{-\left[x^2+2x-5\right]}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{-\left[(x+1)^2-6\right]}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-(x+1)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+c$$

பயிற்சி :-

$\int \frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$ இனைக் காண்க.

நியமவடிவம் :- (17)

$\int \frac{1}{a\cos x+6\sin x+c}dx$ என்ற வடிவிலுள்ள தொகையீடுகள் இங்கு a, b, c ஒருமைகள். இத்தொகையீடுகளைக் கணிப்பதற்கு $t = \tan x/2$ என்ற பிரதியீடு கொடுக்கப்படும்.

உதாரணம் :-

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+3\cos x}dx$$

$t = \tan x/2$

$x \to 0$ ஆக $t \to 0$

$x \to \pi/2$ ஆக $t \to 1$

$dt = \sec^2 x/2 . \frac{1}{2} dx$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+3\cos x}dx = \int_0^1 \frac{1}{5+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{2t^2+8}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2^2+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}.\tan^{-1}\left(t/2\right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left(1/2\right)\right]$$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவற்றைத் தொகையீடுக.

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x}dx$

2. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3\sin 2x+4Cos2x+4}dx$

நியமவடிவம் - (18)

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ என்ற வடிவிலுள்ள தொகையீடுகள் இத்தொகையீடுகளைக் கணிப்பதற்கு x = asinθ என்ற பிரதியீடு கொடுக்கப்படும்.

உதாரணம் :-

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$$

x = 4 sinθ

x→ 0 ஆக θ →0

x→ u ஆக θ →$^{\pi}/_{2}$

dx = 4 cos θ dθ

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{16-16\sin^2\theta}.4\cos\theta d\theta$$

$$= 16\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= 8\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 8\left[\pi/2\right]$$

$$= 4\pi$$

நியமவடிவம் (19) பகுதிகளாகத் தொகையிடல்

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - V\frac{du}{dx}$$

இருபுறமும் x குறித்து தொகையிட

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = \int \frac{d}{dx}(uv)dx - \int v\frac{du}{dx}.dx$$

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$$

இங்கு u,v என்பன x இன் சார்புகளாகும்.

உதாரணங்கள் :-

1. $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$$= xe^x - e^x + c$$

2. $\int x\ln x dx = \ln x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C$$

3. $\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\int_1^2 - \int_1^2 x.\frac{1}{x}dx$

$$= 2\ln 2 - 0 - \int_1^2 1 dx$$

$$= 2\ln 2 - x \Big|_1^2$$

$$= 2\ln 2 - (2-1)$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

4. $$I = \int e^x \sin x - dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$= e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right]$$

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$$

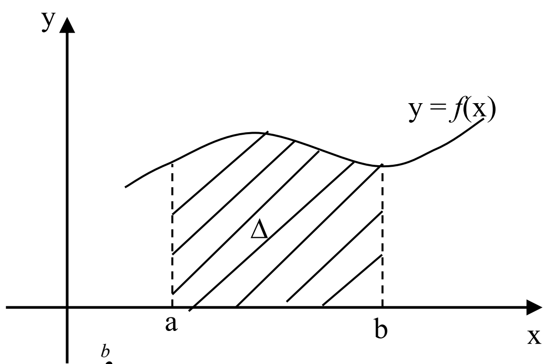
பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக.

1. $\int x \sin x dx$
2. $\int x^2 \sin x dx$
3. $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$
4. $\int x \tan^{-1} x dx$
5. $\int \sec^3 x dx$

தொகையீட்டின் பிரயோகம்

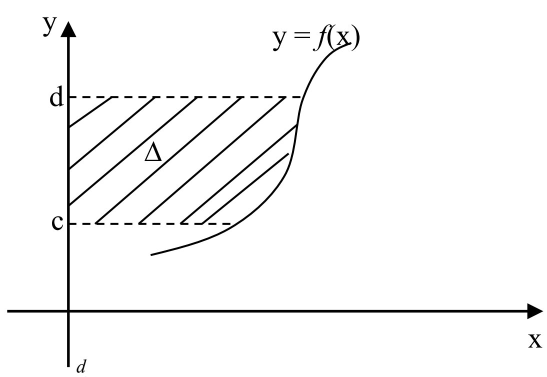
<u>பரப்பளவு</u>

$y = f(x)$ எனும் வளையியைக் கருதுக.

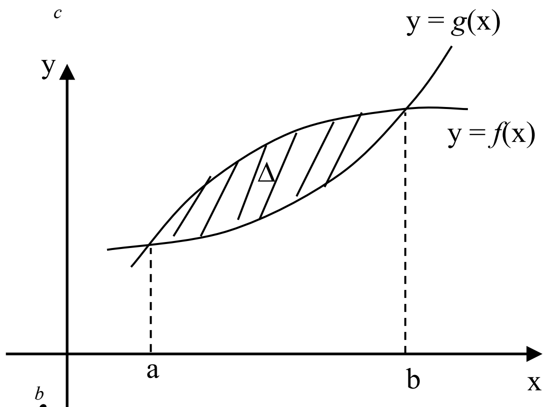


பரப்பு $\Delta = \int_a^b f(x)dx$

Note : (i)



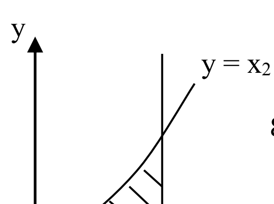
பரப்பு $\Delta = \int_c^d xdy$



பரப்பு $\Delta = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

உதாரணம்.

1. $y=x^2, x=1, y=0$ என்பவற்றிடையில் உள்ள பரப்பைக் காண்க.



பரப்பு $\Delta = \int_0^1 y\,dx$

$= \int_0^1 x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3}\int_0^1$

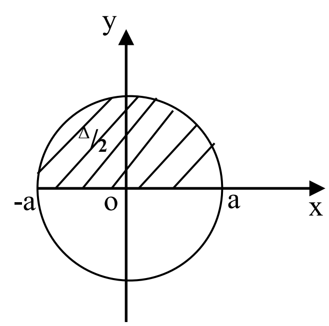
$= {}^1/_3$ சதுர அலகு

2. a ஆரையுடைய வட்டத்தின் பரப்பளவு πa^2 எனக் காட்டுக.

$x^2 + y^2 = a^2$

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$, (x அச்சிற்கு மேல் பாதியை கருதுக $\therefore$ y =0)

$\therefore \Delta/_2 = \int_{-a}^{a} y\,dx$



$\Delta = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos\theta a\cos\theta dx$

$= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)d\theta$

$= a^2\left[\theta \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$= a^2\left[\left(\pi/_2 - 0\right) - \left(-\pi/_2 - 0\right)\right]$

$= \pi a^2$

பிரதியீடு

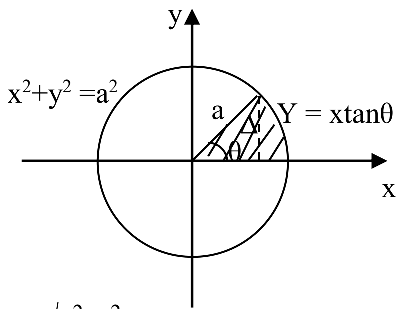
$x = a\sin\theta$

$dx = a\cos\theta d\theta$

$x = -a \rightarrow \sin\theta = -1 \rightarrow \theta = {}^{-\pi}/_2$

$x = a \rightarrow \sin\theta = 1 \rightarrow \theta\ {}^{\pi}/_2$

3. மையத்தில் θ ஆரையன் கோணத்தை எதிரமைக்கும் a ஆரையுடைய ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $\frac{1}{2} a^2\theta$ எனக் காட்டுக.



$y_1 = x\tan\theta$, $y_2 = \sqrt{a^2-x^2}$ $\therefore$ $y_2 > 0$

பரப்பு $\Delta = \int_0^{a\cos\theta} y_1 dx + \int_{a\cos\theta}^{a} y_2 dx$

$\Delta = I_1 + I_2$ என்க

$$I = \int_0^{a\cos\theta} y_1 dx$$

$$I = \int_0^{a\cos\theta} x\tan\theta dx$$

$$= \tan\theta \int_0^{a\cos\theta} x dx$$

$$= \tan\theta \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{a\cos\theta}$$

$$= \tan\theta \left(\frac{a^2\cos^2\theta}{2} - 0\right)$$

$$I_1 = \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{2} \text{..............(1)}$$

$$I_2 = \int_{a\cos\theta}^{a} y_2 dx$$

$$= \int_{a\cos\theta}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \int_{a\cos\theta}^{a} \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\,(-a\sin t dt)$$

$$= a^2 \int_{a\cos\theta}^{\theta} \sin^2 t \sin t dt)$$

$$= a^2 \int_{a\cos\theta}^{\theta} \sin t dt)$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{a\cos\theta}^{\theta} (1 - \cos 2t) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) - 0 \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{2} a^2 \theta - \frac{a^2}{2} \sin\theta \cos\theta ....(2)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} a^2 \theta$$

பயிற்சிகள்

1. $-\pi/_2 \leq x \leq \pi/_2$ என்ற ஆயிடையில் $y = \sin^2 x$, $y = 1 + \cos^2 x$ ஆகிய சார்புகளிற்கான வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பின் பருமனைக் காண்க.

2. $y = x^3$ என்ற வளையியாம் $y = 2x$, $y = x$ என்னும் நேர்கோடுகளாலும் வரைபுகளும் உருவத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

3. $y^2 = 16x$, $3y = 4(4 - x^2)$ என்னும் பரப்பளவுகள் (1,4) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றை ஒன்று வெட்டும் எனக் காட்டுக. முதற்காற்பகுதியில் வேறு ஒரு புள்ளியிலும் வெட்டாதெனில் பருமட்டான வரைபு கீறிக் காட்டுக.
   முதற் காற்பகுதியில் இரு பரவளைவு விற்களாலும் x அச்சாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு 44/9 எனக் காட்டுக.
   $x = c$ என்னும் நேர்கோட்டினால் $(-C^3 + 12C - 5) : (C^3 - 12C + 16)$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனவும் காட்டுக. இங்கு $1 < C < 2$ ஆகும்.

4. $y = x^2, y = x^4$ ஆகியவளையிகளின் வெட்டுப்புள்ளிகளைக்கண்டு, வளையிகளிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவைக்காண்.

29.

(a) முதற் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி x ஐக் குறித்துச் சார்பு $f(x) = \sin x$ இன் பெறுமதியைக் காண்க. $g(x) = \cos x$ இன் பெறுமதியை உய்த்தறிக.

பின்வருவனவற்றை x ஐத் குறித்து வகையிடுக.

(i) $\sin(\ln(1+x^2))$ (ii) $\cos(\sin x)$

(b) $y = \sin k\theta \operatorname{cosec}\theta$ எனவும் $x = \cos\theta$ எனவும் கொள்வோம் இங்கு k ஒரு மாறிலி.

i. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy + k\cos k\theta = 0$ எனவும்

ii. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (k^2-1)y = 0$ எனவும் நிறுவுக.

30. y என்பது x இன் ஒரு சார்பாகும் $x=\sin\theta$ ஆகும்.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\frac{dy}{d\theta}, \frac{d^2y}{d\theta^2}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் தருக

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ky = 0$ எனின்

$\frac{d^2y}{d\theta^2} + ky = 0$ எனக் காட்டுக.

1.

(a) $h(x) = \frac{x^2+6x+7}{(x+2)(x+3)}$ $, x \in \Re$ ஆயிருக்க $h(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$ எனத் தரப்படுகின்றது.

a,b,c எனும் மாறிலிகளைக் காண்க.

$\int_0^2 h(x)dx = 2 + In\left[\frac{25}{18}\right]$ எனக் காட்டுக.

(b) பொருத்தமான பிரதீயீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_2^{\sqrt{6}} \sqrt{8-x^2}\ dx = \frac{1}{3}\left(\pi + 3\sqrt{3} - 6\right)$ எனக்காட்டுக.

(c) பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int_1^2 (xInx)^2\,dx$ ஐக் காண்க.

2.

(a) $f(x)$ எனும் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது.

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ ; \ 0 \le x \le 2 \\ 3x-1 \ ; \ 2 \le x \le 3 \end{cases}$ எனின் $\int_1^3 f(x)dx$ ஐ காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x cos2x dx$ இன்பெறுமானம் கணிக்க.

(c) தக்க பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{32} \frac{1}{x^{4/5}+x^{3/5}} \ dx$ என்பதனைக் காண்க.

3.

a) $\int_{-4}^{4} |x+2| dx = 20$ எனக் காட்டுக.

b) பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int \left[\frac{2x^2 \quad +3x+1}{\sqrt{4x+3}}\right] dx$ ஐக் காண்க.

c) $h(x)$ எனும் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படகின்றது.

$$h(x) = \begin{cases} \sin x & ; 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \frac{\pi}{2} \le x \le 3 \\ e^{x-3} & ; 3 \le x \le 9 \end{cases}$$

$\int_0^9 h(x)dx = 3 + e^6 - \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

4.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x} = \frac{1}{4} \text{In } 3$எனக் காட்டுக.

$p = \frac{5\sin x}{3+5\cos x}$ எனின் $\frac{dp}{dx} = \frac{16}{(3+5\cos x)^2} + \frac{3}{3+5\cos x}$ எனக் காட்டி அதிலிருந்து $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(3+5\cos x)^2}$ இனைக் காண்க.

b) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx$ ஐக் காண்க.

c) பகுதிகளாக தொகையிடல் மூலம் $\int xe^x \ dx$ ஐக் காண்க.

5.

(a) $f(x) \equiv \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

i. A, B, C எனும் மாறிலியைக் காண்க.

ii. $\int f(x)dx$ ஐக் காண்க.

iii. $\int_4^9 f(x)dx = In\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}$ ஐ உய்த்தறிக.

(b) பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப்பயன்படுத்தி

$\int_k^1 \frac{Inx}{\sqrt{x}} dx = 4(\sqrt{k} - 1) - 2\sqrt{k}\ \ In\ k$ எனக் காட்டுக.இங்கே $0 < k < 1$ ஆகும்

(c) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx$ ஐக் காண்க.

6.

(a) $\int \frac{1}{x(1+x)} dx$ ஐக் காண்க.இதில் இருந்து $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3-1}}{2}$ எனக் காட்டுக.

(c) பகுதிகளாக தொகையிடுவதன் மூலம் $\int_2^4 xIn\ cdx = 7In4 - 3$ எனக் காட்டுக.

7.

(a) $\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$ என்பதைக் காண்க?

(b) $\int_0^1 \frac{In|1+x|}{1+x^2} dx$ என்பதைக்கணிக்க?, $Hint\ x = \tan\theta$

(c) c). $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\ sinxdx$ என்க. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\ (pCosx + qSinx)dx = q$ எனின் p + q= 0 எனக் காட்டுக? இங்கு p, q மாறிலிகள்.

8.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan\theta + \theta.sec^2\theta)}{1+\cos(\theta.\tan\theta)} d\theta$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |xsin\ \pi x| dx$ ஐக் காண்க

(c) $\int e^x[f(x) + f^1(x)]dx = e^x f(x) + c$ எனக் காட்டுக இங்கு C எதேட்சை மாறிலி. இதிலிருந்து $\int e^x \frac{(x-1)}{(x+1)^3} dx$ ஐக் காண்க.

9.

(a) $\sin x + \cos x = R\cos(x - a)$ எனும் வடிவில் உணர்த்துக.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(cosx+sinx)^2} dx = 1$ எனக் காட்டுக. $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ எனும் முடிவைப்பயன்படுத்தி

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} dx = \frac{1}{2}, \int_0^{\pi/2} \frac{x}{(\cos x + \sin x)^2} dx = \frac{\pi}{4},$$ எனக்காட்டுக.

(b) 2x+2 = tan θ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{4x^2+8x+13}}\right)dx$ ஐக் காண்க.

(c) $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$ ஐக் காண்க.

10.

(a) 0< a<b ஆக இருக்கும் x = acos^{2}θ +b sinθ எனும் பிரதியீட்டை பயன்படுத்தி

i. $\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}$ எனக்காட்டுக

ii. $\int \frac{dx}{(b-x)^{3/2}(x-a)^{1/2}}$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_a^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ ஐக் காண்க $\int_a^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}dx$ இன் பெறுமதியை உய்த்தறிக.

11.

(a) $\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}dx$ இன் பெறுமானம் காண்க. $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$ இதிலிருந்து ஐக் காண்க.

(b) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ எனின் $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ எனப்பெற்று, $x - \frac{1}{x} = u$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

(c) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}dx$ ஐக் காண்க.

12.

(a) $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx = e^x f(x)$ எனக்காட்டு $\int e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ எனக்காட்டுக.

(c) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$ எனக் காட்டுக

13.

(a) $I = \int_0^1 \tan^{-1} x dx, J\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ எனத் தரப்படும் போது தனித்தனியே தொகையிடாது தக்க பிரதியீட்டைப் பிரயோகித்து I=J எனக்காட்டி அதன் பின்பு அதன் பெறுமதி $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ எனக்காட்டுக.

(b) $\int_0^a \frac{dt}{(t+2)(2+t^2)} = \frac{\pi}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{12}\ln 2$ எனக் காட்டுக.

14.

(a) f, g என்பன (0,2a) மீது தொகையிடக் கூடியதாகவும் f(2a –x) = f(x) , g(2a-x) = -g(x) எனவும் தரப்படின் $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$ எனவும் $\int_0^{2a} g(x)dx = 0$ எனவும் காட்டுக?

(b) $\int\left(\frac{x-1}{2-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ ஐக் காண்க.

(c) பகுதிகளாக தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\frac{1}{3}} x^3 e^{-3x}dx = \frac{2e-5}{27e}$ எனக்காட்டுக.

15.

(a) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ என நிறுவுக. $\int_0^{\frac{1}{3}} x^2 e^{-3x}dx = \frac{2e-5}{27e}$ காட்டுக.

(b) $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$ ஐ மதிப்பிடுக.

(c) $\int \frac{\cos x.e^{-2\sin x}}{1-e^{-\sin x}}dx$ ஐக் காண்க.

16.

(a) $\tan\frac{x}{2}=t$ என்னும் பிரதீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{5+4\sin x}$ ஐக் கணிக்க

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடுவதால் $\int_0^1 15x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ ஐக் கணிக்க

(c) $\int_0^1 \frac{x^2-10x+13}{(x-2)(x^2-5x+6)}dx$ ஐக் காண்க.

17.

(a) $X(x-1)^2=(1+x^2)(x-2)+2$ என்பதையும் $x^4(x-1)^4=(1+x^2)(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)-4$ என்பதையும் வாய்புப்பார்க்க மேற்தரப்பட்ட முடிவுகளைப்பாவித்து

$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}dx$ இனதும் $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$ இனதும் பெறுமானங்களையக் காண்க.

$3<\pi<\frac{22}{7}$ என உய்த்தறிக.

(b) $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}dx=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cot^{-1}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right)+$ மாறிலி எனக்காட்டுக.

(c) $\int \frac{\tan^{-1}\left(e^{x/2}\right)}{e^{x/2}(1+e^x)}dx$ ஐக் காண்க.

18.

(a) $\int \frac{dx}{a+\tan x}$ ஐ பெறுமானம் காண்க இங்கு a ஒரு மெய்மாறிலி

(b) $\int_0^2 3^x\,dx=\frac{8}{\ln 3}$ எனக்காட்டுக.

19. பொருத்தமான பிரதியீட்டை பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4\cos^2 x-9\sin^2 x}dx$ ஐ காண்க.

$\int_0^{\pi/4}\frac{5-9\tan^2 x}{4\cos^2 x-9\sin^2 x}dx$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

20.

(a) $\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}dx$ என்பதைக் கண்டு, $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$ இதிலிருந்து ஐ காண்க.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (Sin^3 t - Cos^3 t)dt$ இன் பெறுமானம் காண்க?

(c) $\int_2^9 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16t}} \ln 2$ எனவும், $\int_{-1}^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+10}} \ln 3$ எனவும் காட்டுக?

21.

(a) பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$ ஐக் காண்க: இங்கு $a \neq 0$

(b)

i. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = 2^x$ எனக் காட்டுக.

ii. $\int 2^x dx$ ஐக் காண்க.

iii. பகுதிகளாபகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}} dx$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க. (2008aug)

22. $\int_0^{\pi} \tan^4\theta \sec^2\theta d\theta$ என்பதைக் கண்டு, அதிலிருந்து $\int_0^{\pi/4} \tan^6\theta d\theta = \frac{1}{5} - \int_0^{\pi/4} \tan^4\theta d\theta$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\int_0^{\pi/4} \tan^6\theta d\theta = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

23. $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\cos\alpha\sin x} = \frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}$ இங்கு α என்பது 0< α<π ஆகவுள்ள ஒரு மாறிலி.

24. $\int \frac{\cos^3 x + _\cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$ ஐக் கணிக்க

25. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})(x-x^2)}$ ஐக் கணிக்க.

26. $\int \frac{e^x(1-x)}{\cos^2(xe^x)}dx$ ஐக் கணிக்க.

27. பகுதிகளாகதொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$ ஐக் காணிக்க.

28. தக்க பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx$ என்பதனைக் காண்க.

29. $\frac{d}{dx}\sqrt{\left[\frac{1+x}{1-x}\right]} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ எனக் காட்டி, பகுதிகளாகத்தொகையிடும் மறையைப் பயன்படுத்தி $\int \frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$ என்பதைக் காண்க.

30. பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int \frac{e^x(\sin 4x-2)}{1-\cos 4x}dx$ என்பதைக் காண்க.

31. $\frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}$ என்பதை பகுதிப் பின்னங்களில் தந்து, அதிலிருந்து $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}dx = 1+\frac{3}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}$ எனக் காட்டுக.

32. $\int \sin^2(\ln x)dx$

33. பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi/3} \frac{x}{1+\cos x}dx$ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

34. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x+1}dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ எனக் காட்டுக.

35. a, b ε z இற்கு $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $\int_0^1 x(1-x)^4 dx$ ஐக் காண்க.

36. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)^2}\,dx$ ஐக் காண்க.

37. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \tan^{-1} x + \frac{1}{3}\tan^{-1} x^3 + c$ எனக் காட்டுக.

38. பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^x\{\ln(\sin x)+\cot x\}\,dx$ ஐக் காண்க.

39. $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx$ ஐக் காண்க.

40. $\int \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ ஐக் காண்க.

41. தக்க பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)^4}\,dx$ என்பதனைக் காண்க.

42. $\int \frac{dx}{\cos^5 x+\sin^5 x}$ ஐக் காண்க.

43. $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$ ஐக் காண்க.

வகையீடு **Differentiation.**

$f(x)$ என்பது x இன் ஒரு சார்பு என்க.

$\Delta x \to 0$ ஆக $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ இன் எல்லைப் பெறுமான x ஐக் குறித்து $f(x)$ இன் வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது பெறுமதி எனப்படும் இது $f(x)$ இனால் குறிக்கப்படும்.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

அல்லது.

y என்பது x இன் ஒருசார்பு என்க. x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் sx இற்கு y இல் மாற்றம் sy எனின் $\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}$ என்பது x ஐக் குறித்து y இன் வகையீட்டுக்குணகம் அல்லது பெறுதி எனப்படும்.

இது $\dfrac{dy}{dx}$ இனால் குறிக்கப்படும். $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}$ அதாவது ஆகும்.

$y=f(x)$ ஆயின். $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}=\dfrac{dy}{dx}$

உதாரணம் : பின்வருவனவற்றின் பெறுதிகளை முதற் தத்துவத்திலிருந்து காண்க.

$f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xy\Delta y-xy}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x+\Delta x\to x}\frac{(x+\Delta x)^{1/2}-x^{1/2}}{(x+\Delta x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x)=x^2+5x+5$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+5-[x^2+5x+5]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x) + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 5)$$

$= 2x+5$

பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றை முதல் தத்துவத்தில் இருந்து வகையிடுக.

vii. $X^{2/5}$

viii. $(3x-1)^{-3}$

ix. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

அட்சரகணிதச் சார்புகளின் வகையீடு

தேற்றம் :- x^n இன் x குறித்த வகையீட்டுக்குணகம் nx^{n-1} ஆகும்.

அதாவது $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

நிறுவல் $f(x) = x^n$ என்க

$$f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

$$\lim_{x + \Delta x \to x} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

$=nx^{n-1}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$$

உதாரணம் :- (1) $y = x^5$

$$\frac{d}{dx} = 5x^4$$

(2) $y = x^{-2/5}$

$$\frac{d}{dx} = \frac{-2}{5}x^{-7/5}$$

பயிற்சிகள்:- பின்வரவனவற்றை x குறித்துவகையிடுக.

xiv. X^{10}

xv. $X^{5/3}$

xvi. $1/x^n$

Note : மாறிலியின் வகையீடு 0 ஆகும்.

அதாவது $\frac{d(C)}{dx} = 0$

இங்கு c- மாறிலி

தேற்றம் f(x), g(x) என்பன x கள் இரு சார்புகள் எனின்

6. $$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} + \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

7. $$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} - \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

8. $$\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}\{g(x)\} + g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

9. $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x).}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\} + f(x)\frac{d}{dx}\{g(x)\}}{\{g(x)\}^2}$$

10. $$\frac{d}{dx}\{cf(x)\} = C\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

இங்கு C- மாறிலி

நிறுவல் $F(x) = f(x) .g(x)$

$$F'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right] + g(x)\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x). \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x). \frac{d}{dx}\{g(x)\} + g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

= f(x).g'(x) + g(x) f'(x)

$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ என்க

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x).g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\left[f(x+\Delta x) - f(x) - f(x)\right]}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x) - g(x+\Delta x)]}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$= -f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= g(x)f'(x)\frac{1}{\{g(x)\}^2} = f(x)g'(x)\frac{1}{\{g(x)\}^2}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக

5. $3x^7$

$y = 3x^7$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}x^7$$

$= 3x7x^b$

$= 21x^6$

6. $4x^5 - 3x^3$

$y = 4x^5 - 3x^3$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times 5 \times 4 - 3 \times 3x^2$$

$= 20x^4 - 9x^2$

7. $(x^3+1)(2x^2-1)$

$y = (x^3+1)(2x^2-1)$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}(2x^2-1) + (2x^2-1)\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$= (x^3+1)\ (2 \text{ x } 2x) + (2x^2-1)(3x^2)$

8. $\frac{\left(x^2+3\right)}{\left(2x-1\right)}$

$y = \frac{x^2+3}{2x-1}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(x^2+3) - (x^2+3)\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(2x) - (x^2+3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-6}{(2x-1)^2}$$

பயிற்சிகள் :- பின்வருவனவற்றை ஒகுறித்து வகையிடுக.

4. $7x^9+5x^6+4x^3-2x-1$

5. $\left(=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

6. $=\frac{1}{ax^2}+\frac{1}{bx^3}+\frac{1}{cx^2}+\frac{1}{dx}+\frac{1}{e};a,b,c,d,e$ மாறிலிகள்

தேற்றம் :- $\frac{d}{dx}\{f(x)\}^n=n\{f(x)\}^{n-1}.f'(x)$

நிறுவல் $F(x)=\{f(x)\}^n$. என்க.

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x\}-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x\}^n-\{f(x)\}^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x\}^n-\{f(x)\}^n}{[f(x+\Delta x)-f(x)]}\times\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{f(x+\Delta x)\to f(x)}\frac{\{f(x+\Delta x\}^n-\{f(x)\}^n}{[f(x+\Delta x)-f(x)]}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

உதாரணம் :- பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

03. $(3x^3+4)^4$

$y=(3x^3+4)^4$ என்க.

$$\frac{dy}{dx}=4(3x^3+4)^3\frac{d}{dx}(3x^3+4)$$

$$=4(3x^3+4)^3(9x^2)$$

04. $(px+q)^5$; p, q மாறிலிகள்

$y=(px+q)^5$ என்க

$$\frac{dy}{dx} 5(px+q)^4(p)$$

பயிற்சிகள் :

3. $(20x^4+3x^2+1)^4$

4. $(ax^2 + bx + c)^3$; a,b,c மாறிகள்

தேற்றம் :- ஒரு சார்பினது சார்பின் வகையீடு y என்பது z இன் ஒரு சார்பாகவும் z என்பது x இன் ஒரு சார்பாகவும் இருப்பின்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} . \frac{dz}{dx}$$ ஆகும்.

உதாரணம் : $y = z^4, Z = x^5+5x$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ இனைக் காண்க.

$$\frac{dy}{dz} = 4z^3$$

$$\frac{dz}{dx} = 5x^4 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} . \frac{dz}{dx}$$

$= 4z^3.(5x^4+5)$

$= 4(x^5+5x)^3(5x^4+5)$

திரிகோண கணித சார்புகளின் வகையீடு.

7. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

8. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

9. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$

10. $\frac{d}{dx} \cos ecx = \cos ecx \cot x$

11. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\cos ec^2 x$

நிறுவல்

7. f(x) = sinx

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

= cos x

$$\frac{d}{dx}\sin x = -\cos x$$

8. f(x) =cos x

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

= -sin x

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

9. f(x) = tanx

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos x . \cos x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tan x = -\sec^2 x$$

10. f(x) = cosecx

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cos ec(x+\Delta x) - \cos ecx}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin x - \sin(x+\Delta x)}{\Delta x \sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \times \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$= -1 \times \frac{\cos x}{\sin x . \sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \cos ecx = -\cos ecx \cot x$$

11. f(x) = secx

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sec(x+\Delta x) - \sec x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cos x - \cos(x+\Delta x)}{\Delta x \cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x \cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$= \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \times \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$$

$$= -1 \times \frac{\sin x}{\cos x . \cos x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sec x \tan x$$

12. f(x) = cos x

$$f'(x) \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cot(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{\cot x}{\sin x}}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin[x-(x-\Delta x)]}{\Delta x \sin(x+\Delta x) \sin x}$$

$$= -\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\times\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\sin x}$$

$$= -1\times\frac{1}{\sin x.\sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cot x = -\cos ec^2 x$$

Note : $\frac{d}{dx}(\sin kx) = \cos kx.k$

$= \text{k cos k}x$

Eg :- $\cos(x)^2$ ஐ முதல் தத்துவத்தில் இருந்து வகையிடுக.

f(x) $=\cos x^2$

$$f'(x)\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\cos(x+\Delta x)^2-\cos x^2}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{2\sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2+x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{x^2-(x+\Delta x)^2}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= 2\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2+x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= 2\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2+x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{\Delta x(\Delta x+2x)}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$= -2\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\sin\left[\frac{(x+\Delta x)^2+x^2}{2}\right]\underset{\frac{\Delta x(\Delta x+2x)}{2}\to 0}{Lt}\frac{Sin\,\frac{[4x(\Delta x+2x)]}{2}}{\frac{[4x(\Delta x+2x)]}{2}}\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta x(\Delta x+2x)}{2\Delta x}$$

$= -2\sin x^2 \text{ x } 1\text{x x}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cos^2 = -2x\sin x^2$$