1) வட்டம், கூம்பு வளையி

2) தொடர்

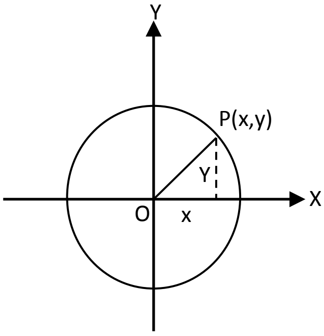
3) புவியீர்ப்பு மையம்

வட்டம்

வரைவிலக்கணம் :-

ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து மாறா தூரத்தில் அசையும் புள்ளியின் ஒழுக்கு வட்டம் எனப்படும். இங்கு நிலைத்த புள்ளி → மையம் எனவும் மாறாத தூரம் → ஆரை எனவும் அழைக்கப்படும்.

1.1



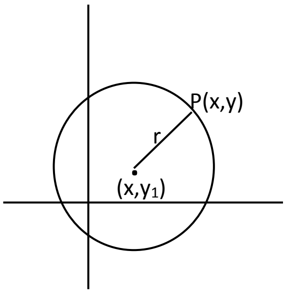
$OP = r$

$OP^2 = r^2$

$\angle x^2 + y^2 = r^2$

இதுவே இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

1.2



$OP^2 = r^2$

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$

உ + ம் :-

i) உற்பத்தியை மையமாகவும் 5 அலகு ஆரையுடைய வட்டச் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 = 5^2$

ii) $(3, -4)$ ஐ மையமாகவும் 6 அலகு ஆரையும் உடைய வட்டசமன்பாடு

$(x - 3)^2 + (y - -4)^2 = 6^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 36$

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

1.3 வட்டத்தின் பொது சமன்பாடு

இது (-g,-f) ஐ மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டம் ஆகும்.

$(x - -g)^2 + (y - -f)^2 = r^2$

$x^2 + 2gx + g^2 + y^2 2fy + f^2 = r^2$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 + f^2 - r^2 = 0$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

இங்கு $c = g^2 + f^2 - r^2$ ஆகும்.

$\therefore r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} > 0$

இவ்வட்ட சமன்பாடுகளில்

i) x^2, y^2 இன் குணகங்கள் சமனாகும்.

ii) xy எனும் உறுப்பு இல்லை

iii) இது ஒரு இரண்டாம்படி சமன்பாடாகும்.

பின்வரும் வட்ட சமன்பாடுகளில் இருந்து அவற்றின் மையத்தையும் ஆரையையும் காண்க.

உ + ம் :-

1) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$

$(x-3)^2 + (y--5)^2 = 4^2$

மையம் $\equiv (3, -5)$

ஆரை $= 4$ அலகு

2) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ உடன் ஒப்பிட்டால்

2g = -2	2f = 6	c = -10
$\therefore$ g = -1	f = 3	
$\therefore$ -g = 1	$\therefore$ -f = -3	

$\therefore$ மையம் $\equiv (1, -3)$

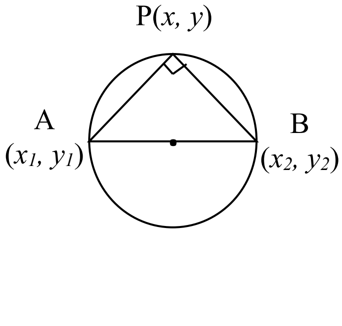
ஆரை $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{1^2 + (-3)^2 - (-10)}$

$= \sqrt{1 + 9 + 10}$

$= \sqrt{20}$ அலகு

1.4 வட்டத்தின் விட்டத்தின் அந்தங்களின் ஆள் கூறுகள் தெரியும் போது வட்டத்தின் சமன்பாடு காணல்.



PB இன் படித்திறன் $= \frac{y-y_2}{x-x_2}$

PA இன் படித்திறன் $= \frac{y-y_1}{x-x_1}$

$A\hat{P}B = 90°$

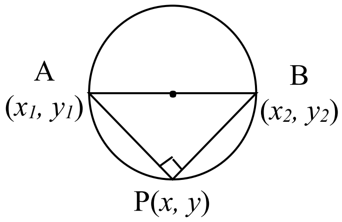
$\therefore$ PA இன் படித்திறன் $\times$ PB படித்திறன் = -1

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

$$\therefore\ (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)\,(y-y_2) = 0$$

உ + ம் :-

(3,5), (2,0) ஐ விட்டத்தின் அந்தங்களாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?



$$\frac{y-5}{x-3} \times \frac{y-0}{x-2} = -1$$

$$(x-3)(x-2) + y(y-5) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 + y^2 - 5y = 0$$

$$x^2 + y2 - 5x - 5y + 6 = 0$$

பயிற்சி

பின்வரும் வட்டங்களின் மையங்களின் ஆள்கூறுகளையும் ஆரையின் நீளங்களையும் காண்க.

1. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16$
2. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 5x - 2y - 5 = 0$
4. $3x^2 + 3y^2 - 10x + 6y + 11 = 0$

விடைகள்

1. (3,5), 4
2. (-2,4), 2
3. $\left(-{}^5/_2, 1\right), {}^7/_2$
4. $\left({}^5/_3, -1\right), {}^1/_3$

பின்வரும் நிபந்தனைகளை திருப்தி செய்யும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

1. மையம் ≡ (2, 7) ஆரை = 5 அலகு $[(x-2)^2 + (y-7)^2 = 5^2]$
2. மையம் ≡ (-3, -1) ஆரை = 2 அலகு $[(x+3)^2 + (y+1)^2 = 2^2]$
3. மையம் ≡ (-6, -8) வட்டம், உற்பத்தியூடாக செல்கிறது.

   $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஐ கருதுக.

   $(0,0)$ ஊடாக செல்வதால்

   $0^2 + 0^2 + 2g(0) + 2f(0) + c = 0$

   $\therefore\ c = 0$

   ஆனால் $(-g, -f) \equiv (-6, -8)$

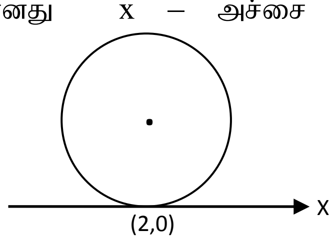
   $g = 6$

   $f = 8$

   $\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 12x + 16y = 0$

4. மையம் $x + y = 0$ என்ற கோட்டில் இரு வட்டமானது x – அச்சை (2,0) ல் தொடுகிறது.

   $(-g, -f),\ x + y = 0$ இல் இருக்கும்.



$=> -g - f = 0$

$\therefore g = -f$

(2,0) ல் தொடுவதால் மையத்தின் x – ஆள் கூறு = 2 ஆகும்.

$\therefore$ $-g = 2$

$\therefore$ $g = 2$

$\therefore$ $f = -2$

(2,0) ஊடாக வட்டம் செல்லதால்

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$2^2 + 0^2 + 2(2)(2) + 2(-2)(0) + c = 0$

$4 + 0 + 8 + 0 + c = 0$

$c = -12$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 12 = 0$

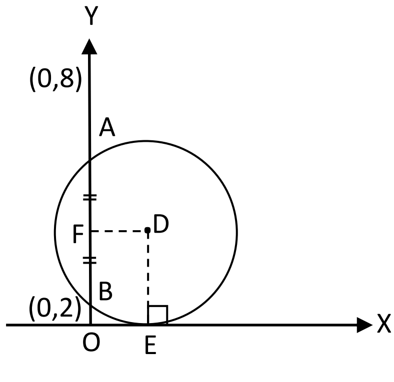
5. மையம் $\equiv (3,2)$, y – அச்சை வட்டம் தொடுகிறது.

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

6. (-2,6), (4,-1) ஆகியவை விட்டத்தின் அந்தங்கள்

$x^2 + y^2 - 2x - 5y - 14 = 0$

7. X அச்சை தொடுவதும், Y – அச்சை (0,2), (0,8) இல் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.



$x^2 + y^2 - 2gx + 2fy + c = 0$

(0,2) ஊடு செல்லதால்

$0 + 4 + 0 + 4f + c = 0$

$4f + c = -4$

(0,8) ஊடு செல்வதால்

$0 + 64 + 0 + 16f + c = 0$

$16f + c = -64$

$\Rightarrow$ $f = -5,\ c = 16$

$F \equiv \left(\frac{0+0}{2}, \frac{2+8}{2}\right) \equiv (0,5)$

$\therefore OF = 5$ அலகு

$\therefore$ ஆரை $= DE = OF = 5$ அலகு

$\therefore \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 5$

$\therefore \sqrt{g^2 + (-5)^2 - (+16)} = 5$

$\sqrt{g^2 + 9} = 5$

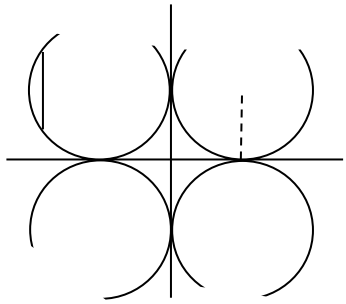
$\therefore g^2 = 16 \Rightarrow g = \pm 4$

$\therefore g = +4, f = -5, c = 16$ எனின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

g= - 4, f = -5, c = எனின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$



8. இரு அச்சுக்களையும் தொடுவதும் 3 அலகு ஆரையுடையதுமான எத்தனை வட்டங்கள் வரையலாம்? அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இவை மையங்கள் (3,3), (3,-3), (-3,3), (-3,-3) ஆகவும் ஆரை 3 அலகாகவும் உள்ள வட்டங்களாகும்.

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

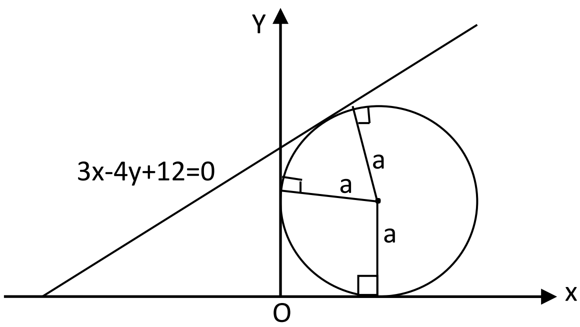
$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

9. $3x - 4y + 12 = 0$ ஐ தொடுவதும், இரு அச்சுக்களையும் தொடுவதுமான வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக்காண்க.

ஆரை = a என்க இரு அச்சுக்களையும் தொடுவதால் மையம் $\equiv (a, a)$ ஆகும்.



மையத்திலிருந்து $3x - 4y + 12 = 0$ இற்கான செங்குத்துத்தூரம் = ஆரை

$\therefore \left|\frac{3(a) - 4(a) + 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = a$

$\left|\frac{12 - a}{5}\right| = a$

$(12-a)^2 = 25a^2$

$144 - 24a + a^2 = 25a^2$

$\therefore 24a^2 + 24a - 144 = 0$

$a^2 + a - 6 = 0$

$(a+3)(a-2) = 0$

$\therefore a = -3$ அல்லது 2

∴ மையம் ≡ (-3, -3) அல்லது (2, 2)

∴ ஆரை = 3 அலகு அல்லது 2 அலகு

∴ வேண்டிய சமன்பாடுகள்

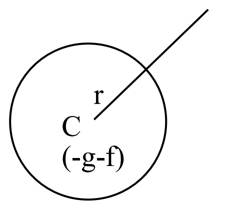
$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

10. (2,0), (1-2), (3,1) எனும் புள்ளிக@டாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$(x^2 + y^2 - 13x + 7y + 22 = 0)$

1.5 வட்டம் சார்பாக ஒரு புள்ளியின் நிலை



இதன் மையம் $\equiv (-g, -f)$

ஆரை $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$A \equiv (x_1, y_1)$ என்பது தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி என்க.

புள்ளி A ஆனது வட்டத்திற்கு உள்ளேயோ,

வட்டத்திலோ,

வட்டத்திற்கு வெளியேயோ இருப்பதற்கு

$Ac < r$ அல்லது $Ac = r$ அல்லது $Ac > r$ ஆகவேண்டும்.

அதாவது

$Ac \lesseqgtr r$

$Ac^2 \lesseqgtr r^2$ $\quad [\because Ac > 0, r > 0]$

$(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 \lesseqgtr g^2 + f^2 - c$

$x_1^2 + 2gx_1 + g^2 + y_1^2 + 2fy_1 + f^2 \lesseqgtr g^2 + f^2 - c$

$\therefore x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \lesseqgtr 0$

உ + ம் :-

1. $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$ எனும் வட்டம் சார்பாக (0,0) எனும் புள்ளியின் நிலையைக் காண்க.

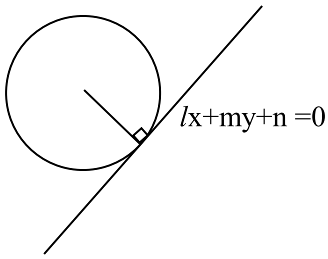
$d = 0^2 + 0^2 - 5(0) + 2(0) - 5$

$= -5 < 0$

$d < 0$ ஆதால் புள்ளி (0,0) வட்டத்தினுள் இருக்கும்.

2. (-1,2), (3,-4), (1,1), (6,1) எனும் புள்ளிகளின் நிலைகளையும் மேற்கூறிய வட்டம் சார்பாக காண்க.
(வெளியே, உள்ளே, உள்ளே வட்டத்தில்)

1.6 வட்டமும் நேர்கோடும் தொடுவதற்கான நிபந்தனை



$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

மையம் $\equiv (-g, f)$

ஆரை $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

மையத்திலிருந்து $lx + my + n = 0$ இற்கான செங்குத்துத்தூரம்

$= \left|\frac{l(-g)+m(-f)+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|$

ஒன்றையொன்று தொட

$\left|\frac{-lg-mf+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

குறிப்பு :-

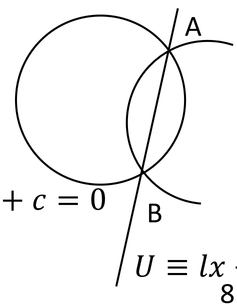
1) ஒன்றையொன்று வெட்ட

$\left|\frac{-lg-mf+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| < \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

2) ஒன்றையொன்று தொடாதிருக்க

$\left|\frac{-lg-mf+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| > \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

1.7 ஒரு வட்டமும், நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு



$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$U \equiv lx + my + n = 0$

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனும் வட்டத்தையும்

$U \equiv lx + my + n = 0$ எனும் நேர்கோட்டையும் கருதுக.

இவை ஒன்றையொன்று $A \equiv (x_1, y_1)\, B(x_2, y_2)$ எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என கொள்வோம்.

λ என்பது x,y இல் தங்கியிராத மாறும் பரமானம் என்க.

$S + \lambda u = 0$ ஐ கருதுக.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + \lambda(lx + my + n) = 0 \rightarrow 1$

இச்சமன்பாட்டில்

i) x^2, y^2 இன் குணகங்கள் சமனாகும்.

ii) xy எனும் உறுப்பு இல்லை

iii) இது x,y இல் இரண்டாம்படி சமன்பாடாகும்.

ஆகவே ① ஆனது ஒரு வட்டத்தை குறிக்கும்.

மேலும்

புள்ளி A, S = 0 ஐ திருப்தி செய்யும்.

$\therefore x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

புள்ளி A, U = 0 ஐ திருப்தி செய்யும்.

$\therefore lx_1 + my_1 + n = 0$

$\therefore x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c + \lambda\ (lx_1 + my_1 + n) = 0$

∴ புள்ளி A ஆனது ① ஐ திருப்தி செய்யும்

இவ்வாறே புள்ளி B ஆனது ① ஐ திருப்தி செய்யும் என காட்டாயம்

∴ ① ஆனது வட்டமும் நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எந்த வட்டத்தையும் குறிக்கும்.

உ + ம் :-

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 10 = 0$ எனும் வட்டமும் $2x + y - 3 = 0$ எனும் நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகவும், (2,-2) ஊடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y - 10 = 0$

$U = 2x + y - 3 = 0$

$\therefore S = 0,\ U = 0$ வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டம்

$S + \lambda u = 0$ ஆகும்.

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y - 10 + d(2x + y - 3) = 0$

இது (2,-2) ஊடாகச் செல்வதால்

$(2)^2 + (-2)^2 - 4(2) - 6(-2) - 10 + \lambda[2(2) + (-2) - 3] = 0$

$2-\lambda=0$

$\therefore \lambda=2$

∴ வேண்டிய சமன்பாடு

$x^2+y^2-4x-6y-10+2(2x+y-3)=0$

$x^2+y^2-4y-16=0$

பயிற்சி – 01

$x^2+y^2-2x-2y-36=0$ எனும் வட்டமும்

$2x+2y+18=0$ எனும் நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்வதும்

i) உற்பத்தியூடாக செல்வதுமான வட்ட சமன்பாடு

ii) உற்பத்தியில் மையத்தையுடைய வட்டசமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

$x^2+y^2+6x+6y=0$

$x^2+y^2=54$

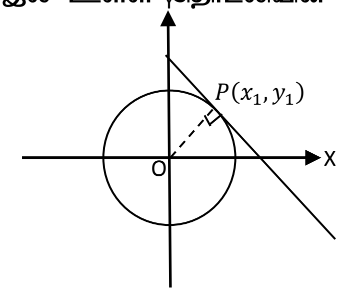
1.8 தொடலியின் சமன்பாடு

1.8.1 $x^2+y^2=r^2$ எனும் வட்டத்திற்கு (x_1,y_1) இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

OP இன் படித்திறன் $=\frac{y_1-0}{x_1-0}$

$=\frac{y_1}{x_1}$

∴ AP இன் படித்திறன் $=\frac{-X_1}{Y_1}$



($O\hat{P}A=90°$ படித்திறன்களின் பெருக்கம் = -1)

∴ AP இன் சமன்பாடு

$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_{1)}$

$y_1(y-y_1)=-x_1(x-x_1)$

$yy_1-y_1^2=-xx_1+x_1^2$

$\therefore xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$

$=r^2$ ((x_1,y_1) வட்டத்தில் இருப்பதால்)

$\therefore x^2+y^2=r^2$ இற்கு (x_1,y_1) இனுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$xx_1+yy_1=r^2$

குறிப்பு

இது $x^2+y^2=r^2$ ஐ

$xx + yy = r^2$ என எழுதப்பட்டு ஒரு x, y இற்கு பதிலாக x_1, y_1 பிரதியிடப்பட்டதாக கருதலாம்.

உ + ம்

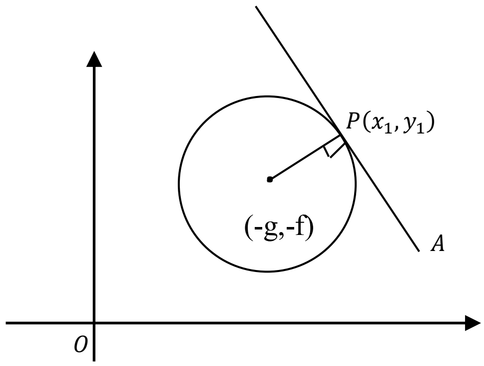
$x^2 + y^2 = 100$ இற்கு (6,8) லுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு யாது?

$xx_1 + yy_1 = 100$

$x(6) + y(8) = 100$

$6x + 8y = 100$

1.8.2 $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இற்கு x_1, y_1 லுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு



CP இன் படித்திறன் $= \frac{y_1+f}{x_1+g}$

$\therefore$ AP இன் படித்திறன் $= -\frac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ AP இன் சமன்பாடு

$y - y_1 = -\frac{y_1+f}{x_1+g}\ (x - x_1)$

$(y_1 + f)(y - y_1) = -(x_1 + g)(x - x_1)$

$yy_1 - y_1^2 + fy - fy_1 = -xx_1 + x_1^2 - gx + gx_1$

$xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

$xx_1 + yy_1 + gx + gx_1 + fy + fy_1 + C = x_1^2 + y_2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C$

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + C = 0$

[$\because$ R.H.S இல் (x_1, y_1) ஆனது S = 0 திருப்தி செய்யும்]

குறிப்பு :-

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ ஐ

$xx + yy + g(x + x) + f(y + y) + C = 0$ என எழுதி

ஒரு x,y இற்கு பதிலாக x_1, y_1 ஐ பிரதியிடுவதாகக் கருதலாம்.

உ + ம் :-

$x^2+y^2-4x+2y-27=0$ இற்கு (-2,3) இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^2+y^2-4x+2y-27=0$

$xx+yy-2(x+x)+(y+y)-27=0$

(-2,3) → $x(-2)+y(3)-2(x+(-2))+(y+3)-27=0$

$-2x+3y-2x+4+y+3-27=0$

$-4x+4y-20=0$

$x-y+5=0$

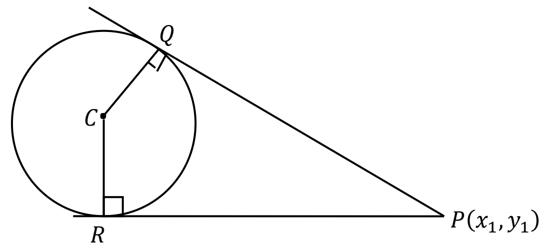
பயிற்சி

$x^2+y^2-10x-2y+13=0$ இற்கு (2,-1) லுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$[3x+2y-4=0]$

1.9 வெளிப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளின் சமன்பாடுகள்

$S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+C=0$



y – அச்சுக்கு சமாந்தரமற்ற, P ஊடாக செல்லும் யாதுமொரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$y-y_1=m(x-x_1)$

$mx-y+y_1-mx_1=0$ ——— (1)

இக்கோடானது S=0 இற்கு தொடலியாயின்

மையத்திலிருந்து (1) இற்கான செங்குத்தூரம் = ஆரை

$$\left|\frac{m(-g)-(-f)+y_1-mx_1}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\right| = \sqrt{g^2+f^2-C}$$

$$\left\{\left|\frac{-mg+f+y_1+mx_1}{\sqrt{m^2+1}}\right|\right\}^2 = g^2+f^2-C$$

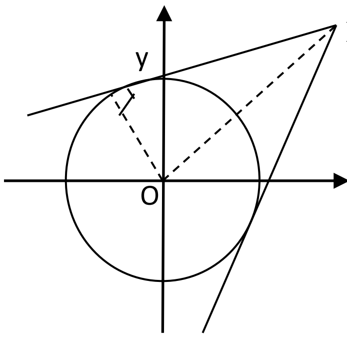
இதில் M மட்டுமே தெரியாக் கணியமாகும். இது M இல் இருபடிச்சமன்பாடு ஆதலால் M இற்கு இரு பெறுமானங்கள் பெறப்படும்.

M இற்கு ஒரு பெறுமானம் மட்டும் பெறப்படின் மற்றையது y அச்சுக்கு சமாந்தரமான கோடாகும்.

∴ (x_1, y_1) ஊடாகச் செல்லும் Y – அச்சுக்கு சமாந்தரமாக செல்லும் நேர்கோடு $x - x_1 = 0$ ஆகும்.

1.10 வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலியின் நீளம்

A. மையம் உற்பத்தியில் உள்ள போது



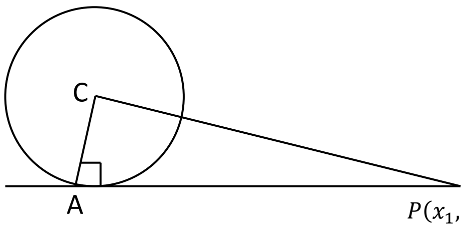
$AP^2 = OP^2 - OA^2$

$= (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 - r^2$

$AP^2 = x_1^2 + y_1^2 - r^2$

$\therefore AP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$

B. மையம் உற்பத்தியில் இல்லாத போது



அதாவது $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$

$AP^2 = CP^2 - AC^2$

$= (x_1 - -g)^2 + (y_1 - -f)^2 - r^2$

$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - C)$

$= x_1^2 + 2gx_1 + y_1^2 + 2fy_1 + C$

$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C$

$\therefore AP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C}$

உ + ம்

$S \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ எனும் வட்டத்தையும்

$P \equiv (4,2)$ எனும் புள்ளியையும் கருதுக.

i) புள்ளி P ஆனது S இற்கு வெளியில் இருக்கும் என காட்டுக.

ii) Pலிருந்து S இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளின் நீளத்தைக் காண்க.

iii) P லிருந்து S இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

i) $S \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \qquad P \equiv (4,2)$

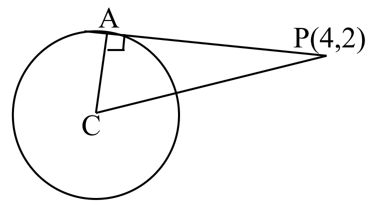
$d = 4^2 + 2^2 - 4(4) - 2(2) + 4$

$= 16 + 4 - 16 - 4 + 4$

$= 4 > 0$

∴ புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும்.

அல்லது



S இன் ஆரை $= \sqrt{(-2)^2 + (x-1)^2}$

$= 1$ அலகு

மையம் $\equiv (2,1)$ CP $= \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2}$

$= \sqrt{5}$

$\sqrt{5} > 1$ ஆதலால் புள்ளிவட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும்.

ii) தொடலியின் நீளம் $= \sqrt{4^2 + 2^2 - 4(4) - 2(2) + 4}$

$= \sqrt{4}$

$=$ 2 அலகு

iii) (4, 2) ஊடு செல்லும் யாதுமொரு கோட்டின் சமன்பாடு

$y - 2 = m(x-4)$

$mx - y + 2 - 4m = 0$

இது வட்டத்திற்கு தொடலி எனின்

மையத்திலிருந்து கோட்டுக்கான செங்குத்துதூரம் = ஆரை

$\left|\frac{2m-1+2-4m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 1$

$\left|\frac{1-2m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 1$

$(1-2m)^2 = m^2 + 1$

$1 - 4m + 4m^2 = m^2 + 1$

$3m^2 - 4m = 0$

$m(3m-4) = 0$

$\therefore m = 0 \quad or \quad {}^4/_3$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடுகள் $M = 0 \rightarrow \quad -y + 2 = 0$

$\therefore y = 2$

$M = {}^4/_3 \rightarrow \quad \frac{4}{3}x - y + 2 - 4\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

$4x - 3y + 6 - 16 = 0$

$4x - 3y - 10 = 0$

பயிற்சி

1) (0,6) எனும் புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 23 = 0$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
$\begin{bmatrix} 3y - 4x - 18 = 0 \\ 4y + 3x - 24 = 0 \end{bmatrix}$

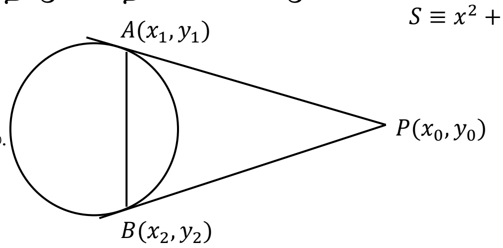
2) (1,2) எனும் புள்ளியிலிருந்து வட்டம் $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 9 = 0$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
$\begin{bmatrix} y - 2 = 0 \\ 4x + 3y - 10 = 0 \end{bmatrix}$

3) (1,2) எனும் புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ இற்கு கீறிய தொடலிகளின் தொடுபுள்ளிகளைக் காண்க.
$[(1, -1),\ (-2,2)]$

1.11 தொடுகைநாண்

வெளிப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகைப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண் தொடுகை நாண் எனப்படும்.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$



இங்கு AB தொடுகைநாண் ஆகும்.

$PA \equiv xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + C = 0$

$PB \equiv xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + C = 0$

$P \equiv (x_0 x_0)$ என்பது இவ்விரு கோடுகளிலும் கிடத்தலால்

$x_0 x_1 + y_0 y_1 + g(x_0 + x_1) + f(y_0 + y_1) + C = 0$

$x_0 x_2 + y_0 y_2 + g(x_0 + x_2) + f(y_0 + y_2) + C = 0$

இதிலிருந்து $A \equiv (x_1, y_1)$ $B \equiv (x_2, y_2)$ எனும் புள்ளிகள்

$x_0 x + y_0 y + g(x + x_0) + f(y_0 + y) + C = 0$ ஐ திருப்தி செய்கின்றன என கூறலாம்.

அதாவது A,B என்பன

$x_0 x + y_0 y + g(x + x_0) + f(y + y_0) + C = 0$ இல் உள்ளன.

எனவே தொடுகைநாணின் சமன்பாடாகும்.

உ + ம் :-

(1,2) இலிருந்து வட்டம் $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ இற்கு கீறிய தொடலிகளின் தொடு புள்ளிகளைக் காண்க.

→ தொடுகைநாணின் சமன்பாடு

$$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + C = 0$$

$$x(1) + y(2) + 2(x + 1) + (y + 2) - 4 = 0$$

$$x + 2y + 2x + 2 + y + 2 - 4 = 0$$

$$3x + 3y = 0$$

$$x + y = 0$$

$x + y = 0$ ஐயும் $S = 0$ ஐயும் தீர்த்தலால்

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$$

$x + y = 0$

$\Rightarrow y = -x$

$$\therefore x^2 + x^2 + 4x + 2(-x) - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$\therefore x = 1$ அல்லது -2

$\therefore y = -1$ அல்லது 2

$\therefore$ தொடுகைப்புள்ளிகள் (1,-1), (-2,2)

பயிற்சி

(1,-2) எனும் புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ எனும் வட்டத்திற்கான தொடுகைநாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

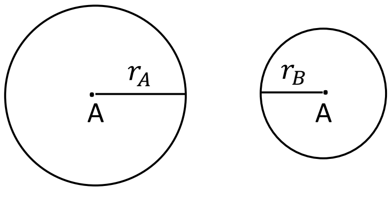
$[3x - 5y + 17 = 0]$

1.12 $S_1 = 0, S_2 = 0$ எனும் இரு வட்டங்கள் பின்வருமாறு அமையலாம்.

S_1 இன் மையம் A எனவும் ஆரை r_A எனவும்

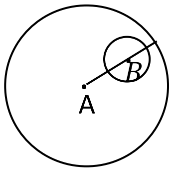
S_2 இன் மையம் B எனவும் ஆரை r_B எனவும் கொள்க.

AB = மைய இடை தூரம்

1) 

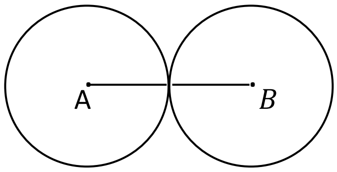
→ ஒன்றையொன்று வெட்டாதவாறு வெளியே இருத்தல்

$AB > r_A + r_B$

2) 

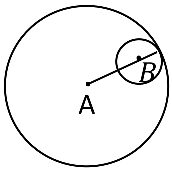
→ ஒன்றையொன்று வெட்டாதவாறு ஒன்றுக்குள் மற்றையது இருத்தல்.

$AB < r_A - r_B$

3) 

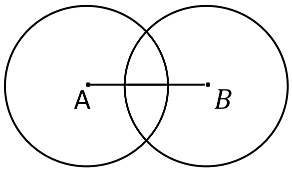
→ ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக தொடுகின்றன.

$AB = r_A + r_B$

4) 

→ ஒன்றையொன்று உட்புறமாக தொடுகின்றன.

$AB = r_A - r_B$

5) 

→ ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன..

$r_A - r_B < AB < r_A + r_B$

உ + ம் :-

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ எனும் வட்டமும்

$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ எனும் வட்டமும் ஒன்றையொன்று தொடும் எனக் காட்டுக.

$S_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

S_2 இன் மையம் (3,1) ஆரை $= \sqrt{9 + 1 - 1} = 3$ அலகு

S_2 இன் மையம் (0,-3) ஆரை $= \sqrt{0 + 9 - 5} = 3^2$ அலகு

∴ மைய இடைத்தூரம் d $= \sqrt{(3-0)^2 + (1 - -3)^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5 \quad = \quad 3 + 2 = \ r_1 + r_2$

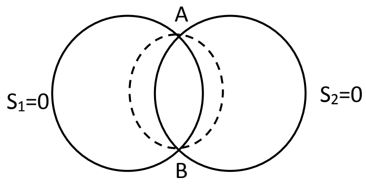
∴ S_1 உம் S_2 உம் வெளிப்புறமாகத்தொடும்.

பயிற்சி

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ உம் $x^2 + y^2 - 2x - 6y + a = 0$ உம் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக தொட்டால் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$[a = 6]$

1.13 இருவட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்கள்.



$A \equiv (x_1, y_1)$

$B \equiv (x_2, y_2)$ என்க.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$

$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + C' = 0$ என்க.

$S + \lambda s' = 0$ ஐ ஆராய்க. ($\lambda \neq -1,\ \lambda$ என்பது x,y ஐ சாராத பரமாணம்)

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C + \lambda(x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + C') = 0$ —— (1)

$(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 - (2g + 2g'\lambda)x + (2f + 2f'\lambda)y + C + \lambda C' = 0$

இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

A, S=0 ஐயும் S|=0 ஐயும் திருப்தி செய்யும்.

$\therefore\ x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C = 0$ —— (2)

$x_1^2 + y_1^2 + 2g'x_1 + 2f'y_1 + C' = 0$ —— (3)

$\therefore\ x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C + \lambda\,(x_1^2 + y_1^2 + 2g'^{x_1} + 2f'^{y_1} + C') = 0$

$\therefore\ A \equiv (x_1, y_1)$ ஆனது $S + \lambda s' = 0$ ஐ திருப்தி செய்யும்

இவ்வாறே $A \equiv (x_2, y_2)$ ஆனது $S + \lambda s' = 0$ ஐ திருப்தி செய்யும்

$\therefore\ S + \lambda s^1 = 0$ எனும் வட்டமானது A,B ஊடாகச் செல்லும் வட்டங்களை குறிக்கும்.

அதாவது $S + \lambda s' = 0$ எனும் வட்டமானது, S=0, S^1=0 வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு

1. λ = -1 எனின் $S + \lambda s' = 0$ ஆகும்.

   $2(g - g')x + 2(f - f')y + C - d = 0$

   இது AB ஊடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டை குறிக்கும்.

   இது இவற்றின் பொது தொடலி ஆகும்.
2. λ = 0 எனின் $S' = 0$ எனும் வட்டத்தை குறிக்கும்.
3. $\lambda \to \alpha$ எனின் $S + \lambda s' = \frac{s}{\lambda} + S' \to S'$ ஆகும்.

எனவே S’=0 எனும் வட்டத்தை குறிக்கும்.

4. S = 0, $S' = 0$ உம் தொடுமாயின் $S + \lambda s' = 0$ ஆனது அவற்றின் தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

உ + ம் :-

$x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0,\ x^2 + y^2 + 3x - y - 2 = 0$ எனும் அவற்றின் தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்வதும் புள்ளி (1,0) ஊடாக செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0$ $\qquad S_2 \equiv x^2 + y^2 + 3x - y - 2 = 0$

$S_1 = 0$ உம் $S_2 = 0$ உம் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்களின் சமன்பாடு

$S_1 + \lambda S_2 = 0 \quad (\lambda \neq -1)$

$x^2 + y^2 - x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 + 3x - y + 2) = 0$

இது (1,0) ஊடு செல்வதால்

$1 + 0 + 1 - 0 + 1 + \lambda(1 + 0 + 3 - 0 - 2) = 0$

$3 + 2\lambda = 0$

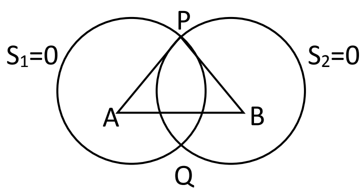
$\lambda = -{}^3/_2$

∴ வேண்டிய சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + x - 2y + 1 + {}^{-3}/_2\,(x^2 + y^2 + 3x - y - 2) = 0$

$\rightarrow\ x^2 + y^2 + 7x + y - 8 = 0$

1.14 இருவட்டங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம்



$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + C_1 = 0$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + C_2 = 0$

$\therefore A \equiv (-g_1, -f_1)$

$B \equiv (-g_2, -f_2)$

இருவட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகள் P அல்லது Q இல் வரையப்படும் தொடலிகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் அவ்வட்டங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் எனப்படும்.

குறிப்பு

இது ஒரு செங்கோணமாயின் வட்டங்கள் நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனப்படும்.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் ஒன்றினது தொடலி மற்ற வட்டத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்லும் (தொடலி தொடு புள்ளியில் அமையும் ஆரைக்கு செங்குத்து)

$\therefore AB^2 = PA^2 + PB^2$

$(-g_1+g_2)^2 + (-f_1+f_2)^2 = g_1^2 + f_1^2 - C_1 + g_2^2 + f_2^2 - C_2$

$g_1^2 + g_2^2 - 2g_1g_2 + f_1^2 + f_2^2 - 2f_1f_2 = g_1^2 + f_1^2 - C_1 + g_2^2 + f_2^2 - C_2$

$\therefore 2g_1g_2 + 2f_1f_2 = C_1 + C_2$

இதுவே வட்டங்கள் நிமிர்கோணத்தில் வெட்ட நிபந்தனை ஆகும்.

உ + ம் :-

$S_1 \equiv 12x^2 + 12y^2 + 92x + 171 = 0$ எனும் வட்டம்

$S_2 \equiv 4x^2 + 4y^2 - 60x + 48y + 173 = 0$ எனும் வட்டத்தை நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுகின்றது எனக்காட்டுக.

S_1 இல் $g_1 = \frac{-92}{24} = \frac{-23}{6}$, $f_1 = 0$ $C_1 = \frac{171}{12}$

S_2 இல் $g_2 = \frac{-60}{8}$ $f_2 = \frac{48}{8}$ $C_2 = \frac{173}{4}$

$= \frac{-15}{2}$ $= 6$

$2g_1g_2 + 2f_1f_2$	$C_1 + C_2$
$= 2\left(\frac{-23}{6}\right)\left(\frac{-15}{2}\right) + 2(0)(6)$	$= \frac{171}{12} + \frac{173}{4}$
$= \frac{115}{2}$	$= \frac{171+519}{12}$
	$= \frac{690}{12}$
	$= \frac{115}{2}$

$\therefore 2g_1g_2 + 2f_1f_2 = C_1 + C_2$

$\therefore$ இவை நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும்.

பயிற்சி

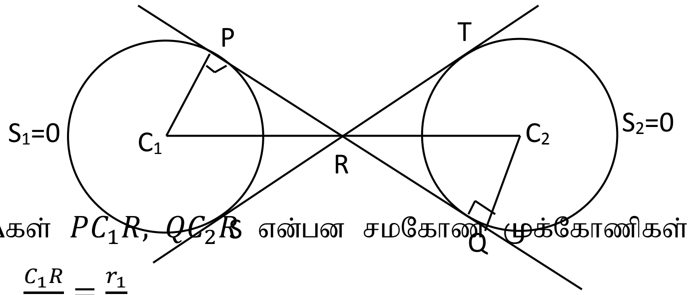
1. $4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y - 11 = 0$ ம்
   $12x^2 + 12y^2 - 92x + 171 = 0$ ம் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் என காட்டுக.

2. $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0,$ $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$ எனும் வட்டங்களின் பொதுப்புள்ளிகளினூடாகச் சென்று S_1=0 என்பதை நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
   $\left[S_1 + \lambda S_2 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{32}{17} \quad 49x^2 + 49y^2 + 4x + 154y - 307 = 0\right]$

1.15 இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடலிகள்

A. வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டாது, தொடாது இருத்தல்.

குறுக்கு பொது தொடலிகள்



$C_1 \equiv (-g_1, -f_1)$

$C_2 \equiv (-g_2, -f_2)$

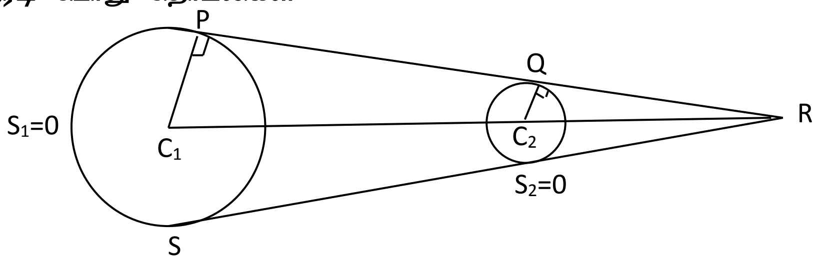
Δகள் $PC_1R,\ QC_2R$ என்பன சமகோண முக்கோணிகள்

$\therefore\ \frac{C_1R}{C_2R} = \frac{r_1}{r_2}$

$\therefore\ R \equiv \left[\frac{r_1(-g_2)+r_2(-g_1)}{r_1+r_2},\ \frac{r_1(-f_2)+r_2(-f_1)}{r_1+r_2}\right]$

இதிலிருந்து $S_1=0$ எனும் வட்டத்திற்கு R வெளிப்புள்ளி எனக் கொண்டு RP, RS எனும்சமன்பாடுகளைப் பெறலாம். (1-9 இல் கூறப்பட்டுள்ளது).

நேரடி பொது தொடலிகள்



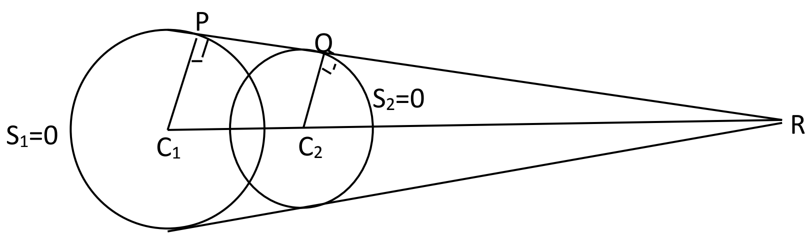
Δகள் $RPC_1,\ RQC_2$ என்பன சமகோண முக்கோணிகள்

$\frac{C_1R}{C_2R} = \frac{r_1}{r_2}$

$\therefore\ R \equiv \left[\frac{r_1(-g_2)-r_2(-g_1)}{r_1-r_2},\ \frac{r_1(-f_2)-r_2(-f_1)}{r_1-r_2}\right]$

இங்கும் 1.9 மூலம் RP, RS இன் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

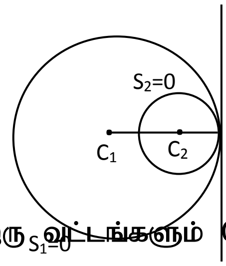
B. இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல்



$\frac{C_1R}{C_2R} = \frac{r_1}{r_2}$

$\therefore\ R \equiv \left[\frac{r_1(-g_2)-r_2(-g_1)}{r_1-r_2},\ \frac{r_1(-f_2)-r_2(-f_1)}{r_1-r_2}\right]$

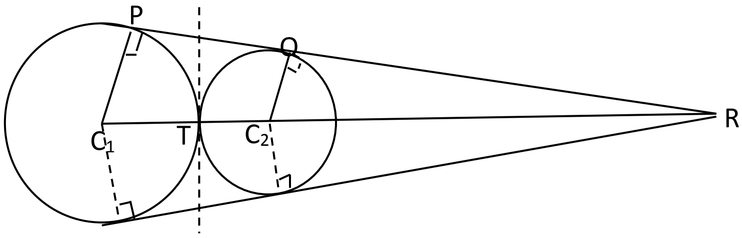
C. இரு வட்டங்களும் உட்புறமாக தொடுதல்



பொது தொடலி $S_1 - S_2 = 0$

(1.13 இன் குறிப்பு 1)

D. இரு வட்டங்களும் வெளிப்புறமாகத் தொடுதல்



RP, RQ எனும் தொடலிக்கான

Δகள் RPC_1 RQC_2 சமகோண முக்கோணிகள்

$\frac{C_1R}{C_2R} = \frac{r_1}{r_2}$ → R காணலாம். B இல் கூறப்பட்டுள்ளது.

இங்கு T ஊடாகச் செல்லும்

S_1-S_2=0 எனும் தொடலியும் உண்டு என்பதை அவதானிக்கவும்.

உ + ம் :-

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0,$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ என்பவற்றின்

பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

S_1=0 இன் மையம் - C_1 ஆரை r_1 எனவும்

S_2=0 இன் மையம் - C_2 ஆரை r_2 எனவும்

$C_1 \equiv (-1, -2)$ $r_1 = \sqrt{(+1)^2 + 2^2 - 1} = 2$

$C_2 \equiv (3, 4)$ $r_2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 - 9} = 4$

$C_1C_2 = \sqrt{(3 - -1)^2 + (4 - -2)^2}$

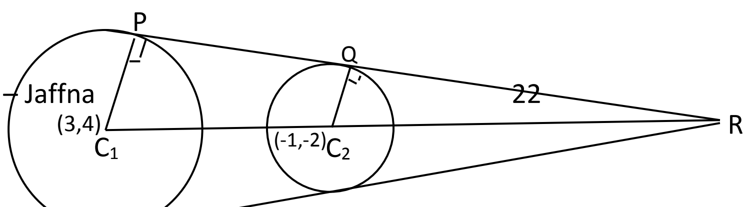
$= \sqrt{16 + 36}$

$= \sqrt{52}$

இங்கு $\sqrt{52} > 2 + 4$

அதாவது $C_1C_2 > r_1 + r_2$

ஆகவே இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டாமல் ஒன்றுக்கு வெளியே மற்றயது இருக்கும்.



ஆரைகளை கருத்தில் கொண்டு படம் வரையவும் S_1 இன் ஆரை <S_2 இன் ஆரை

$\frac{C_2R}{C_1R} = \frac{4}{2}$

$\therefore R \equiv \left[\frac{4(-1)-2(3)}{4-2}, \frac{4(-2)-2(4)}{4-2}\right]$

$\equiv (-5, -8)$

$S_1 = 0$ இற்கு வரையப்படும் தொடலி

y = mx + c என்க.

இது R ஊடாக செல்வதால் R ≡ (-5, -8)

-8 = m(-5) + C

C = 5m - 8

y = mx + c அதாவது mx – y + c = 0 என்பது.

$S_2 = 0$ இற்கு தொடலியாதலால் ஆரைக்கு சமமாகும்.

$S_2 = 0$ இன் மையத்திலிருந்து இதற்குள்ள செங்குத்துதூரம் ஆரைக்கு சமமாகும்.

$\left|\frac{m(3)-4+c}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 4$

$(3m - 4 + c)^2 = 16(m^2 + 1)$

$(3m - 4 + 5m - 8)^2 = 16(m^2 + 1)$

$(8m - 12)^2 = 16(m^2 + 1)$

$\therefore (2m - 3)^2 = m^2 + 1$

$4m^2 - 12m + 9 = m^2 + 1$

$3m^2 - 12m + 8 = 0$

$m = \frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{6}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6}$

$= \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{6}$

$m = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

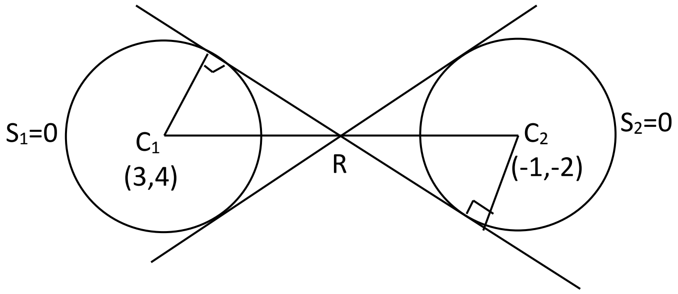
$\therefore C = 5m - 8$

தொடலிகளின் சமன்பாடுகள்

$y = \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)x + 2 + \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$y = \left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)x + 2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow\ C = 2 \pm \frac{10\sqrt{3}}{3}$



$\frac{C_2R}{C_1R} = \frac{4}{2}$

$R \equiv \left[\frac{4(-1)+2(3)}{4+2}, \frac{4(-2)+2(4)}{4+2}\right]$

$\equiv \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

$S_2 = 0$ இற்கு வரையப்படும் தொடலி

$$y = mx + C$$

அதாவது $mx - y + C = 0$ என்க.

இது R ஊடாக செல்வதால்

$m\left(\frac{1}{3}\right) - 0 + C = 0$

$\therefore C = -\frac{1}{3}m$

$mx - y + C = 0$ என்பது $S_1 = 0$ இற்கு தொடலி எனின் மையத்திலிருந்து செங்குத்தூரம் = ஆரை

$\left|\frac{m(3)-4+C}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 4$

$(3m - 4 + C)^2 = 16(m^2 + 1)$

$\left(3m - 4 - \frac{1}{3}m\right)^2 = 16(m^2 + 1)$

$\left(\frac{8m}{3} - 4\right)^2 = 16(m^2 + 1)$

$\left(\frac{8m-12}{3}\right)^2 = 16(m^2 + 1)$

$\frac{16}{9}(2m - 3)^2 = 16(m^2 + 1)$

$(2m - 3)^2 = 9(m^2 + 1)$

$4m^2 - 12m + 9 = 9m^2 + 9$

$5m^2 + 12m = 0$

$m(5m + 12) = 0$

$\therefore$ m = 0 அல்லது $-\frac{12}{5}$

$\therefore$ C = 0 அல்லது $+\frac{4}{5}$

$\therefore$ தொடலிகளின் சமன்பாடுகள்

$m = 0,\ C = 0 \ \rightarrow \ y = 0$

$m = -\frac{12}{5},\ C = {}^{4}/_{5} \ \rightarrow \ y = -\frac{12x}{5} + \frac{4}{5}$

எனவே தொடலிகளின் சமன்பாடுகள்

$y = \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)x + 2 + \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$y = \left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)x + 2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$y = 0$

$y = -\frac{12}{5}x + \frac{4}{5}$

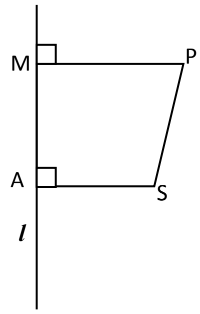
பயிற்சி

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20$

$S_2 \equiv 5x^2 + 5y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ என்பன உட்புறமாக தொடுமெனக் காட்டி, பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$[r_1 = 5, r_2 = 2,\quad S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 4x - 3y - 14 = 0]$

கூம்பு வளையிகள் Conics



l ஒரு நிலையான நேர்கோடு

S ஒரு நிலையான புள்ளி

$\frac{SP}{PM} =$ ஒருமை

ஆகுமாறு அசையும் புள்ளி P இன் ஒழுக்கு கூம்புரு எனப்படும்.

நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரத்துக்கும் நிலையான ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து உள்ள தூரத்துக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் ஒருமை ஆகுமாறு ஒரு தளத்தில் அசையும் புள்ளியின் ஒழுக்கு கூம்பு எனப்படும்.

S – என்னும் நிலையான புள்ளி குவியம் எனப்படும்.

L – என்னும் நிலையான கோடு செலுத்தி எனப்படும்.

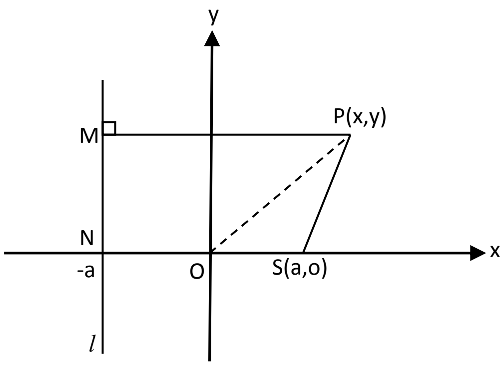
ஒருமை விகிதமானது மையவகற்றிசித்திறன் (eccentricity) எனப்பட்டு e இனால் குறிக்கப்படும்.

$e=1$ எனின் கூம்பு வெட்டு ஆனது பரவளைவு எனப்படும்.

$0<e<1$ எனின் கூம்பு வெட்டு ஆனது நீள்வளையம் எனப்படும்.

$e>1$ எனின் கூம்பு வெட்டு ஆனது அதிபரவளைவு எனப்படும்.

பரவளைவின் சமன்பாடு பெறல் :-



l –நிலையான கோடு

S –நிலையான புள்ளி

S இனூடாக l க்கு செங்குத்தாக வரையப்படும் நேர்கோட்டை x அச்சாகக் கொள்க.

x அச்சு l ஐ N இல் இடை வெட்டுகின்றது என்க. NS இன் இருகூறாக்கிச் செங்குத்தை வரைந்து அதனை y – அச்சாக்க் கொள்க.

$OS = a$ என்க. எனின் l இன் சமன்பாடு $x = -a$

$P \equiv (x.y)$ யாதுமொரு மாறும் புள்ளி என்க.

$\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$

$(x-a)^2 + y^2 = e^2(x+a)^2$

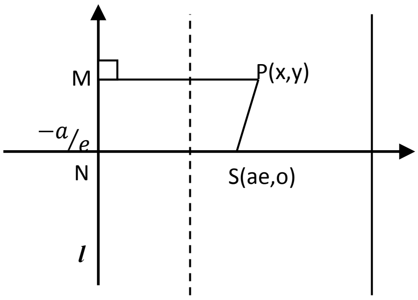
e = 1 ஆக பரவளைவு பெறப்படும்.

$\therefore (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

$y^2 = 4ax$

எனவே பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$

நீள்வளையத்தின் சமன்பாடு பெறல்



o<e<1

$(x-ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$

x^2

$x^2(1-e^2) + y^2 = 2aex - 2aex + a^2(1-e^2$

$a^2(1-e^2) = b^2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

e>1 எனில்

$1 - e^2 < 0$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்பது அதிபரவளைவின் சமன்பாடாகும்.

பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$

குவியம் $S \equiv (a, o)$

செலுத்தியின் சமன்பாடு x=-a

நீள்வளையத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

நீள்வளையம் x,y அச்சுக்களைப் பற்றிச் சமச்சீரானது.

இரு குவியங்கள் S, S'

$S \equiv (ae, o), \ S' \equiv (-ae, o)$

இரு செலுத்திகள் $x = {a}/{e}$, $x = {-a}/{e}$

அதிபரவளையின் சமன்பாடு

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

அதிபரவளைவும் அச்சுக்களைப் பற்றிச் சமச்சீரானது.

$S \equiv (ae, o), \ \ S' \equiv (-ae, o)$

செலுத்திகளின் சமன்பாட்டை $x = {}^{a}/_{e}\,, \quad x = {}^{-a}/_{e}$

b = a ஆக $x^2 - y^2 = a^2$ இது செவ்வக அதிபரவளைவு எனப்படும்.

செவ்வக அதிபரவளைவின் நியம சமன்பாடு $xy = C^2$ ஆகும்.

இங்கு C – பரமானம்.